ESSEC BUSINESS SCHOOL
MASTÈRES SPÉCIALISÉS

CRÉDIT AGRICOLE CIB

M.S. Finance & Asset Management

Options Vanilles : du modèle de Black au modèle SABR, l'importance du smile de volatilité

Crédit Agricole Corporate & Investment Banking

Soutenue par

Thomas LEMONNIER

Promotion 2009/2010

Directeur de thèse professionnelle : Andras FULOP

Directeur de mission : Ilan ABEHSIRA

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements à mon directeur de mission, Monsieur Ilan ABEHSIRA ainsi qu'à mon directeur de thèse professionnelle, Monsieur Andras FULOP, qui ont bien voulu accepter d'évaluer mon travail.

J'aimerais ensuite exprimer mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont accompagnées pendant ce stage et qui ont œuvré pour que celui-ci se réalise dans les meilleures conditions possibles.

Je réitère mes remerciements à Monsieur Ilan ABEHSIRA, mon tuteur, pour son aide et pour la confiance qu'il a eue en moi durant le stage mais aussi à Aurélien DENIAU qui m'a beaucoup aidé dans l'établissement de mon projet professionnel.

Je n'oublie pas les autres membres du desk, Vincent TYROU et Richard ATTIAS, ainsi que mon binôme stagiaire, Jérémie CHASTEL.

Enfin, un merci tout particulier à Anne-Caroline TUFFERY, responsable des desks vente banques privées et caisses régionales, sans qui je n'aurais pas pu bénéficier de ce stage.

Synthèse

Le marché des taux d'intérêt est un marché complexe : les taux d'intérêts fluctuent sans cesse et sont multiples puisqu'à chaque échéance correspond un taux d'intérêt différent. C'est pour cette raison que la structure des taux est dite « par terme ».

Le pricing des produits dérivés de taux est donc moins aisé que le pricing des produits dérivés action ou indice.

Cependant le sujet de mon étude ne portera pas sur ces différents modèles de taux mais s'intéressera plus particulièrement au problème du smile de volatilité, sujet tout aussi important car il est un élément central dans leur valorisation.

En effet, pour chaque strike, la volatilité d'une option est différente. Il faut donc utiliser un modèle qui permet de recréer ce qui est appelé le « smile de volatilité ».

Le modèle de Black ne permet pas de pricer correctement les produits dérivés puisqu'il impose une volatilité constante.

C'est cependant à partir du modèle de Black et pour résoudre le problème de la volatilité constante du modèle de Black, qu'en 2002, Haagan, Kumar, Lesniewski et Woodward ont développé le modèle SABR ce qui a constitué une avancée majeure pour la valorisation des produits vanilles. Cette nouvelle méthode de reconstitution du smile de volatilité permet de pricer d'une manière beaucoup plus précise les produits de taux.

Ce rapport a donc comme objectif de montrer l'utilité du modèle SABR et l'évolution en termes de précision qu'il apporte par rapport au modèle de Black.

Dans la première partie de ce travail, c'est l'environnement du marché des taux qui sera développé. Nous y détaillerons les différents taux existants ainsi que les différents marchés, puis nous présenterons la méthode de reconstitution de la courbe des taux « zéro-coupon ».

Dans la deuxième partie, nous expliquerons comment est créée la courbe des taux utilisée dans la pratique ainsi que la reconstitution de la courbe des forwards.

Dans la troisième partie, nous aborderons la théorie du modèle de Black puis nous l'utiliserons dans un cas pratique.

Enfin, dans la quatrième et dernière partie, nous étudierons plus précisément le modèle SABR dans le cadre du pricing d'options vanilles et nous montrerons l'avancée par rapport au modèle de Black.

Sommaire

I. Introduction sur le marché et théorie des taux d'intérêts

A. Le concept du taux d'intérêt

La notion de taux d'intérêt tient une place centrale dans le fonctionnement des économies modernes. En effet, la notion de taux s'applique à toute opération d'endettement ou de prêt, mais cette notion de taux permet également de comparer et de mesurer la rentabilité des différents instruments financiers.

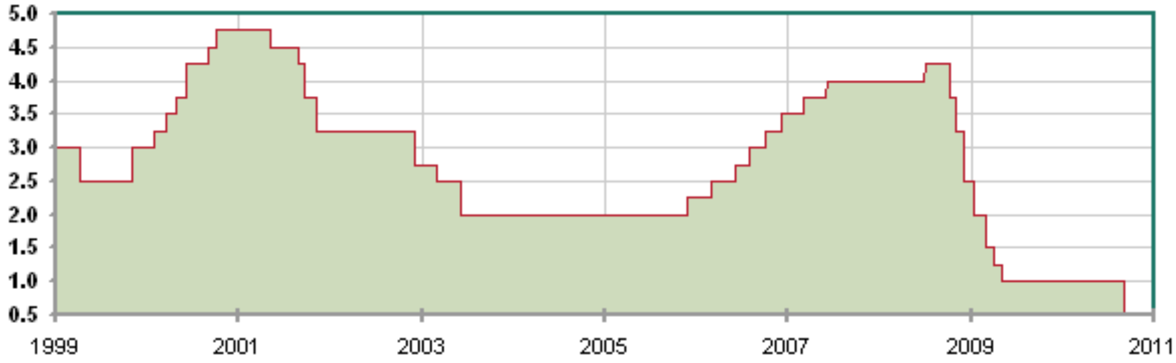
Le marché des taux d'intérêt, créé lors de la première moitié du XIXème, est le plus vieux marché financier. Les marchés des instruments de taux d'intérêts sont les plus importants marchés de capitaux du monde et ce très loin devant le marché des actions.

Le niveau des taux d'intérêt est fixé par le marché grâce au mécanisme de l'offre et de la demande. Il est cependant régulé, en arrière plan, par les banques centrales qui fixent leurs taux directeurs pour réguler l'activité économique.

Il existe principalement trois taux directeurs :

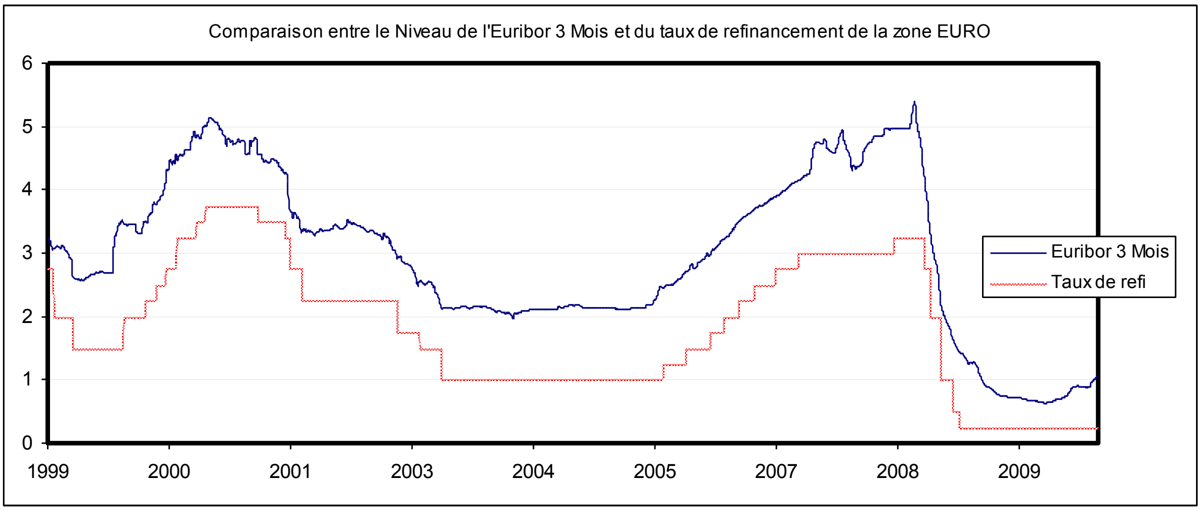
- le taux de rémunération (de facilité) des dépôts : c'est le taux fixé par les banques centrales auquel sont rémunérés les dépôts que placent les banques et autres établissements financiers auprès de la banque centrale

- le taux de refinancement (taux repo) : c'est le principal taux directeur des banques centrales, c'est celui-ci qui a le plus fort impact sur la régulation de l'économie. C'est le taux auquel les banques et autres institutions financières peuvent emprunter auprès des banques centrales.



Graphique 1 - Graphique du taux de refinancement de la Zone EURO[1]

Le graphique 1 permet d'observer le taux de refinancement depuis 1999 en zone EURO mais surtout les décisions de la Banque Centrale Européenne sur le niveau de ce taux lors de la crise de subprimes.



Graphique 2 - Impact du taux de refinancement sur l'Euribor 3 Mois

Le Graphique 2 permet de montrer que les décisions de la Banque Centrale sur le taux de refinancement ont un impact direct sur les taux de marché comme l'Euribor 3 mois (dont nous donnerons la définition dans le prochain paragraphe)

- le taux d'escompte : c'est le taux d'intérêt utilisé sur le marché monétaire pour les prêts à très court terme.

[1] http://www.lesechos.fr/chiffres-economie/teurefi.htm

Le concept de taux est central dans l'activité économique mondiale. Lors de la crise des subprimes, la notion de liquidité, et donc indirectement le niveau des taux d'intérêt, a tenu une place primordiale. Sans la politique de taux très bas qui a été menée par les banques centrales du monde entier, la liquidité et donc l'économie mondiale seraient restées figées.

Ce marché, qui s'adapte continuellement au besoin économique, est donc par le fait, tributaire des décisions des banques centrales. En cas de changement de politique, une décision de hausse du taux de refinancement par exemple, et ce sont toutes les anticipations sur les taux qui sont revues. Les courbes des taux translatent verticalement et c'est toute la valorisation des produits de taux du marché qui est modifiée.

B. Les différents types de taux

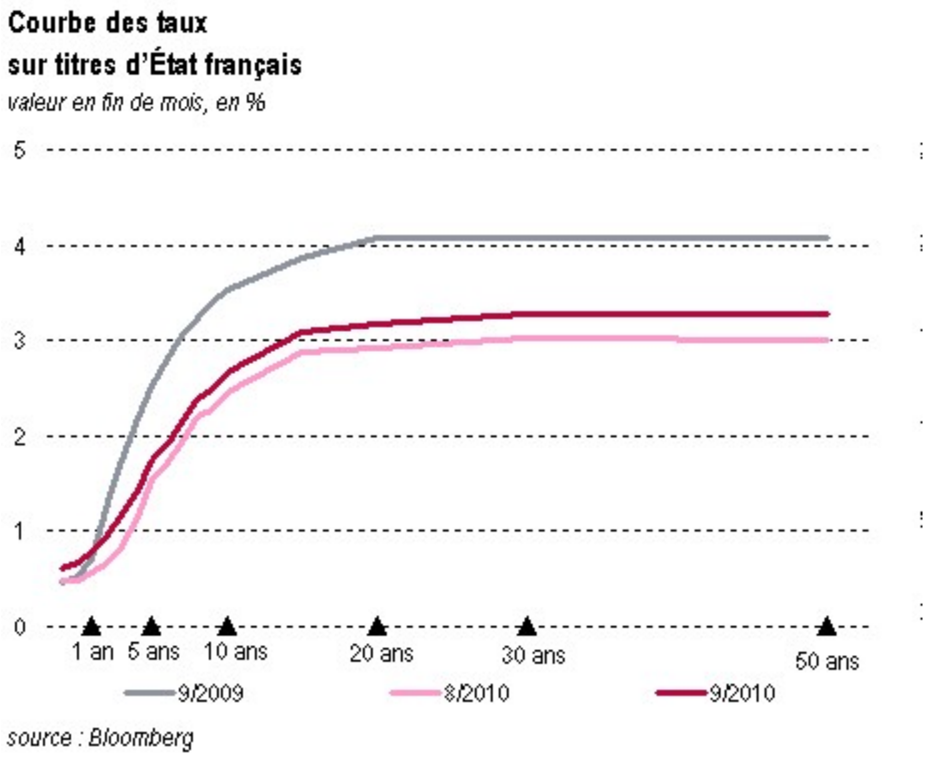
Le taux d'intérêt est le montant qu'un emprunteur promet à un prêteur. Il existe de nombreux taux d'intérêt qui dépendent, entre autres, du risque de crédit de l'emprunteur. Voici deux des types de taux fondamentaux sur le marché des produits dérivés.

1. Les taux d'emprunts d'Etat

Ce sont les taux applicables aux emprunts que font les gouvernements dans leur propre devise.

Par exemple, les taux d'Etat français sont les taux auxquels peut emprunter l'Etat français. Ces taux sont ceux des papiers (obligations) que la banque de France émet sur le marché mondial.

En première approche, on suppose que ces taux ne présentent pas de risque de défaut. Ils sont donc la plupart du temps appelés taux sans risque. En effet, il est généralement fait l'hypothèse qu'un Etat pourra toujours rembourser les emprunts qu'il a réalisés.



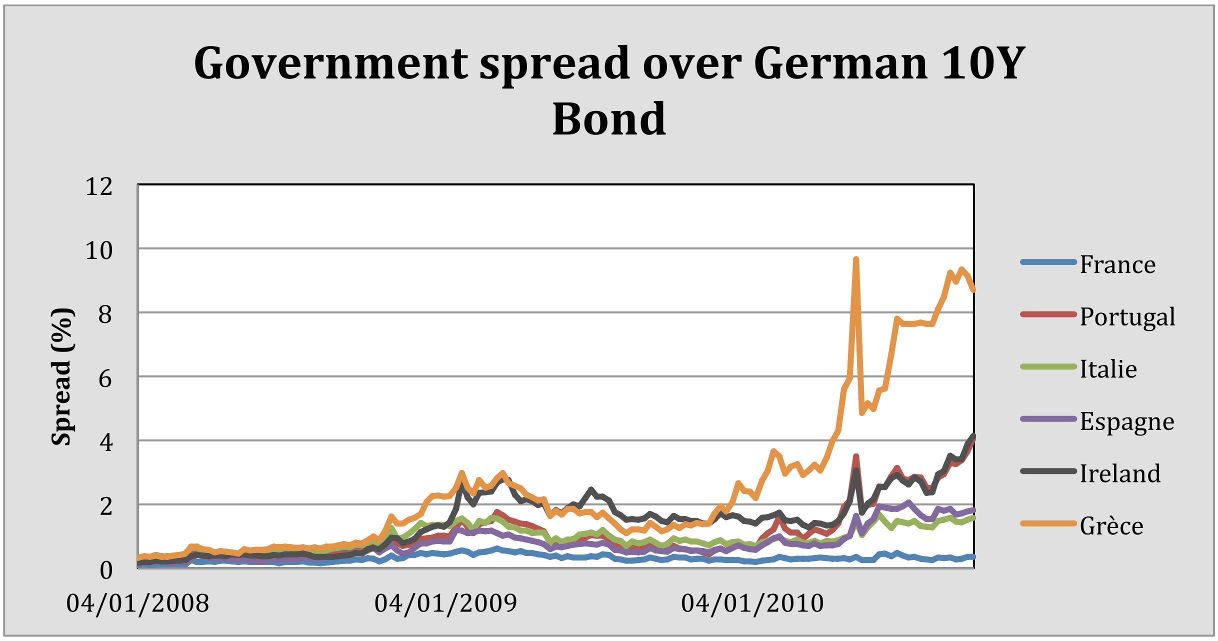
Graphique 3 - Courbe des taux de l'Etat français à trois dates[2]

Il faut cependant atténuer l'affirmation ci-dessus. En effet, en supposant que le taux de tous les Etats est sans risque, leurs taux d'Etats respectifs devraient être similaires or, ce n'est pas le cas. Chaque pays peut emprunter à un taux qui lui est propre et qui dépend de sa probabilité de défaut. Cette probabilité est donc faible mais pas nulle.

Nous avons pu constater lors de la crise des PIGS (Portugal – Irlande/Italie – Grèce – Spain), que certains observateurs ont pu croire qu'il était possible que l'un de ces pays fasse faillite.

---

2 http://www.aft.gouv.fr/aft_fr_23/dette_etat_24/principaux_chiffres_70/sur_titres_158/sur_titres_125.html



Graphique 4 - Spread des taux d'Etat 10Y par rapport au taux Allemand. Source bloomberg page GGR – Période Janvier 2008 -> Oct 2010

Le graphique 4 est significatif puisque qu'il affiche clairement la grande diversité des niveaux de taux suivant les pays. Par exemple, le spread entre le taux 10Y allemand et le taux 10Y grecque était de plus de 9% en octobre 2010.

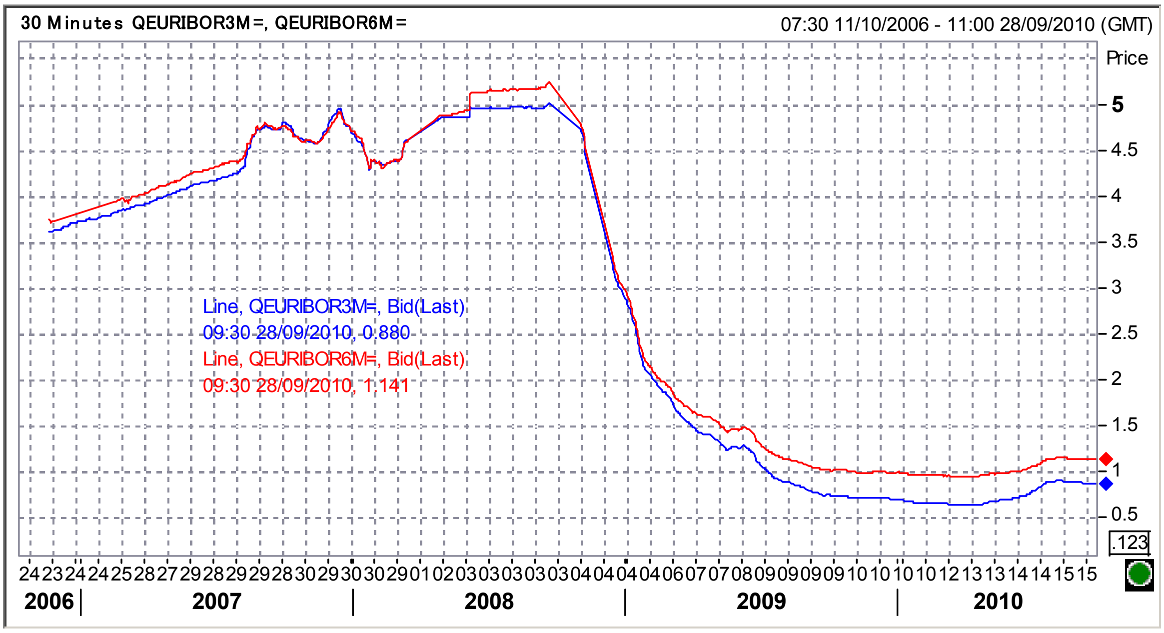
2. Les taux LIBOR

Les grandes institutions financières internationales négocient en permanence entre elles des prêts et des emprunts dans toutes les grandes devises pour des durées inférieures à 1 an. Les banques cotent deux taux :

- Le LIBID (London Interbank Bid Rate) : c'est le taux auquel une banque voudrait placer son argent
- Le LIBOR (London Interbank Offered Rate) : c'est le taux auquel une banque rémunère les placements des autres banques.

Dans les salles des marchés, ces taux sont utilisés comme taux sans risque. Ainsi, les opérateurs utilisent ces taux pour l'évaluation des actifs financiers, notamment pour l'actualisation des flux. La raison principale est que c'est à ces taux que les banques d'une part placent leurs excédents de trésorerie sur ce marché et d'autre part qu'elles se refinancent.

En Europe, c'est l'EURIBOR qui est le principal taux de référence. Le taux EURIBOR est, pour une échéance donnée, le taux moyen auquel un échantillon de 57 grandes banques établies en Europe prêtent (en blanc) à d'autres grandes banques. Le fixing est calculé chaque jour ouvré à 11h (heure française). Le graphique 5 montre les niveaux de l'Euribor 3 mois et de l'Euribor 6 mois depuis 2006.



Graphique 5 - Représentation de l'Euribor 3 Mois (bleu) et de l'Euribor 6 Mois (rouge) - 28/09/2010 – Reuters

C. La notion de zéro-coupon

1. Le taux zéro-coupon

Un taux zéro-coupon est, pour une date de départ et une durée donnés, le taux actuariel qu'aurait une obligation, de même caractéristique temporelle, mais ayant un coupon de 0%, c'est-à-dire un investissement engendrant un seul flux à terme.

Les taux zéro-coupon sont nécessaires car seul un ensemble de taux zéro-coupon permet de calculer des coefficients d'actualisation cohérents. Pour les gestionnaires de fonds et les professionnels des marchés financiers, les taux zéro-coupon sont primordiaux. En effet, ceux-ci utilisent, pour actualiser les flux financiers d'un instrument, des taux zéro-coupon différents, correspondant aux dates de chacun des flux, plutôt que d'appliquer un taux actuariel global, sorte de taux moyen ne tenant pas compte de la forme de la courbe des taux. A noter que la plupart des obligations disponibles sur le marché ne sont pas des taux zéro-coupon, car elles payent des coupons positifs.

2. Calcul du prix d'une obligation

Une obligation est un ensemble de flux décalés dans le temps. Ces flux ne sont donc pas directement comparables entre eux. Un euro dans 10 ans n'a pas, aujourd'hui, la même valeur que le même euro dans 5 ans, c'est le principe de l'actualisation.
La valeur de l'obligation est donc la somme des valeurs actuelles de chacun des flux de celle-ci. Dans une première approximation, il existe une formule simplifiée de l'actualisation, avec un seul taux, le taux actuariel. Ainsi, une obligation versant N coupons est valorisée comme suit (le prix étant disponible dans le marché):

$$Prix_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Coupon}{(1+r)^i} + \frac{100 + Coupon}{(1+r)^N}$$

Cependant, en pratique le taux r n'est pas constant, et la formule devient :

$$Prix_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Coupon}{(1+r_i)^i} + \frac{100 + Coupon}{(1+r_N)^N}$$

Pour finir, le taux zéro-coupon x d'une obligation zéro-coupon ne versant qu'un flux final dans N année est la valeur de x qui satisfait cette équation :

$$Prix_0 = \frac{100 + Coupon}{(1+x)^N}$$

3. La détermination des taux zéro-coupon

Etant donné qu'il n'y a pas sur le marché autant d'obligations zéro-coupon que de maturité voulue, il faut définir un moyen de trouver les taux zéro-coupon à partir des obligations disponibles sur le marché. On doit alors utiliser la méthode du bootstrap permettant d'extraire les taux zéro-coupon des prix des obligations disponibles.

Cette méthode utilise l'algorithme suivant[3] :

- ETAPE 1 : Trouver une obligation ne versant plus de coupon et dont l'échéance correspond à la maturité la plus courte. A partir de cette obligation, on extrait le taux r_1.
- ETAPE 2 : Trouver le plus d'obligations ne donnant plus de coupons et retrouver les taux zéro-coupon correspondants. On peut donc extraire le taux $r_2 \ldots r_i$

D'après le paragraphe précédent, il est facile d'obtenir les taux zéro-coupon d'obligations zéro-coupon puisqu'il suffit d'inverser la formule ci-dessous :

$$Prix_0 = \frac{100 + Coupon}{(1+x)^N}$$

- ETAPE 3 : Il faut maintenant utiliser des obligations portant des coupons. Il faut trouver une obligation pour laquelle des taux zéro-coupon ont été identifiés pour les différents coupons payables avant la maturité. A partir du prix de l'obligation et des taux zéro-coupon déjà déterminés, il est possible d'extraire le taux zéro coupon r_{i+1}.

Mathématiquement, nous avons ceci :

---

[3] http://www.batd.eu/debodt/downloads/boostrap.pdf

$$Prix_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Coupon}{(1+r)^i} + \frac{100 + Coupon}{(1+r)^N}$$

Grâce aux étapes précédentes les taux zéro-coupons pour i=0 à N-1 sont connus. L'inversion est donc à effectuer sur cette formule :

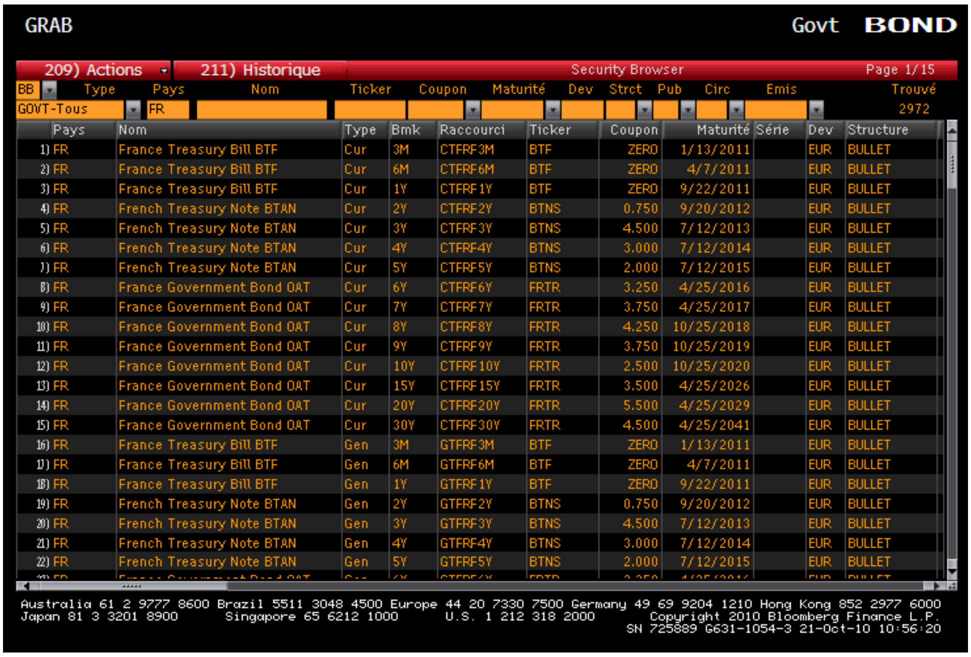
$$Prix_0 - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Coupon}{(1+r)^i} = \frac{100 + Coupon}{(1+x)^N}$$

- ETAPE 4 : Recommencer l'ETAPE 3 jusqu'à obtenir l'ensemble des taux zéro-coupon.

En pratique, il est difficile de trouver des obligations dont la maturité est exactement celle voulue. Il est donc possible de procéder à une interpolation linéaire entre une obligation de maturité inférieure et une obligation de maturité supérieure.

4. Détermination des taux zéro-coupon : application pratique

Pour cette partie, il a été décidé de recréer la courbe des taux zéro-coupon à partir d'un panier d'obligations de l'Etat français. Les données ont été obtenues sur Bloomberg (Image 1).



GRAB Govt BOND

209) Actions 211) Historique Security Browser Page 1/15

BB Type Pays Nom Ticker Coupon Maturité Dev Strct Pub Circ Emis Trouvé

GOVT-Tous FR 2972

	Pays	Nom	Type	Bmk	Raccourci	Ticker	Coupon	Maturité	Série	Dev	Structure
1)	FR	France Treasury Bill BTF	Cur	3M	CTFRF3M	BTF	ZERO	1/13/2011		EUR	BULLET
2)	FR	France Treasury Bill BTF	Cur	6M	CTFRF6M	BTF	ZERO	4/7/2011		EUR	BULLET
3)	FR	France Treasury Bill BTF	Cur	1Y	CTFRF1Y	BTF	ZERO	9/22/2011		EUR	BULLET
4)	FR	French Treasury Note BTAN	Cur	2Y	CTFRF2Y	BTNS	0.750	9/20/2012		EUR	BULLET
5)	FR	French Treasury Note BTAN	Cur	3Y	CTFRF3Y	BTNS	4.500	7/12/2013		EUR	BULLET
6)	FR	French Treasury Note BTAN	Cur	4Y	CTFRF4Y	BTNS	3.000	7/12/2014		EUR	BULLET
7)	FR	French Treasury Note BTAN	Cur	5Y	CTFRF5Y	BTNS	2.000	7/12/2015		EUR	BULLET
8)	FR	France Government Bond OAT	Cur	6Y	CTFRF6Y	FRTR	3.250	4/25/2016		EUR	BULLET
9)	FR	France Government Bond OAT	Cur	7Y	CTFRF7Y	FRTR	3.750	4/25/2017		EUR	BULLET
10)	FR	France Government Bond OAT	Cur	8Y	CTFRF8Y	FRTR	4.250	10/25/2018		EUR	BULLET
11)	FR	France Government Bond OAT	Cur	9Y	CTFRF9Y	FRTR	3.750	10/25/2019		EUR	BULLET
12)	FR	France Government Bond OAT	Cur	10Y	CTFRF10Y	FRTR	2.500	10/25/2020		EUR	BULLET
13)	FR	France Government Bond OAT	Cur	15Y	CTFRF15Y	FRTR	3.500	4/25/2026		EUR	BULLET
14)	FR	France Government Bond OAT	Cur	20Y	CTFRF20Y	FRTR	5.500	4/25/2029		EUR	BULLET
15)	FR	France Government Bond OAT	Cur	30Y	CTFRF30Y	FRTR	4.500	4/25/2041		EUR	BULLET
16)	FR	France Treasury Bill BTF	Gen	3M	GTFRF3M	BTF	ZERO	1/13/2011		EUR	BULLET
17)	FR	France Treasury Bill BTF	Gen	6M	GTFRF6M	BTF	ZERO	4/7/2011		EUR	BULLET
18)	FR	France Treasury Bill BTF	Gen	1Y	GTFRF1Y	BTF	ZERO	9/22/2011		EUR	BULLET
19)	FR	French Treasury Note BTAN	Gen	2Y	GTFRF2Y	BTNS	0.750	9/20/2012		EUR	BULLET
20)	FR	French Treasury Note BTAN	Gen	3Y	GTFRF3Y	BTNS	4.500	7/12/2013		EUR	BULLET
21)	FR	French Treasury Note BTAN	Gen	4Y	GTFRF4Y	BTNS	3.000	7/12/2014		EUR	BULLET
22)	FR	French Treasury Note BTAN	Gen	5Y	GTFRF5Y	BTNS	2.000	7/12/2015		EUR	BULLET

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2010 Bloomberg Finance L.P.
SN 725889 G631-1054-3 21-Oct-10 10:56:20

Image 1 – Exemple de page Bloomberg comprenant les différents taux d'Etats Français.

Les données des 14 obligations d'Etat utilisées sont réunies dans ce tableau :

N°	Maturité	Coupon	Base	Ask
1	23/12/2010	0	Act/360	99.94
2	24/03/2011	0	Act/360	99.77
3	22/09/2011	0	Act/360	99.36
4	22/09/2012	0.75	Act/Act	99.75
5	12/07/2013	4.5	Act/Act	109.26
6	12/07/2014	3	Act/Act	105.97
7	12/07/2015	2	Act/Act	101.43
8	25/04/2016	3.25	Act/Act	107.22
9	25/04/2017	3.75	Act/Act	110.16
10	25/10/2018	4.25	Act/Act	113.802
11	25/04/2019	4.25	Act/Act	113.7
12	25/04/2020	3.5	Act/Act	107.24
13	25/04/2026	3.5	Act/Act	105.306
14	25/04/2029	5.5	Act/Act	132.34

Tableau 1 - Caractéristiques des 14 obligations d'Etats utilisées

Les obligations 1 à 3 permettent d'accéder directement au taux zéro-coupon (ETAPE 1).

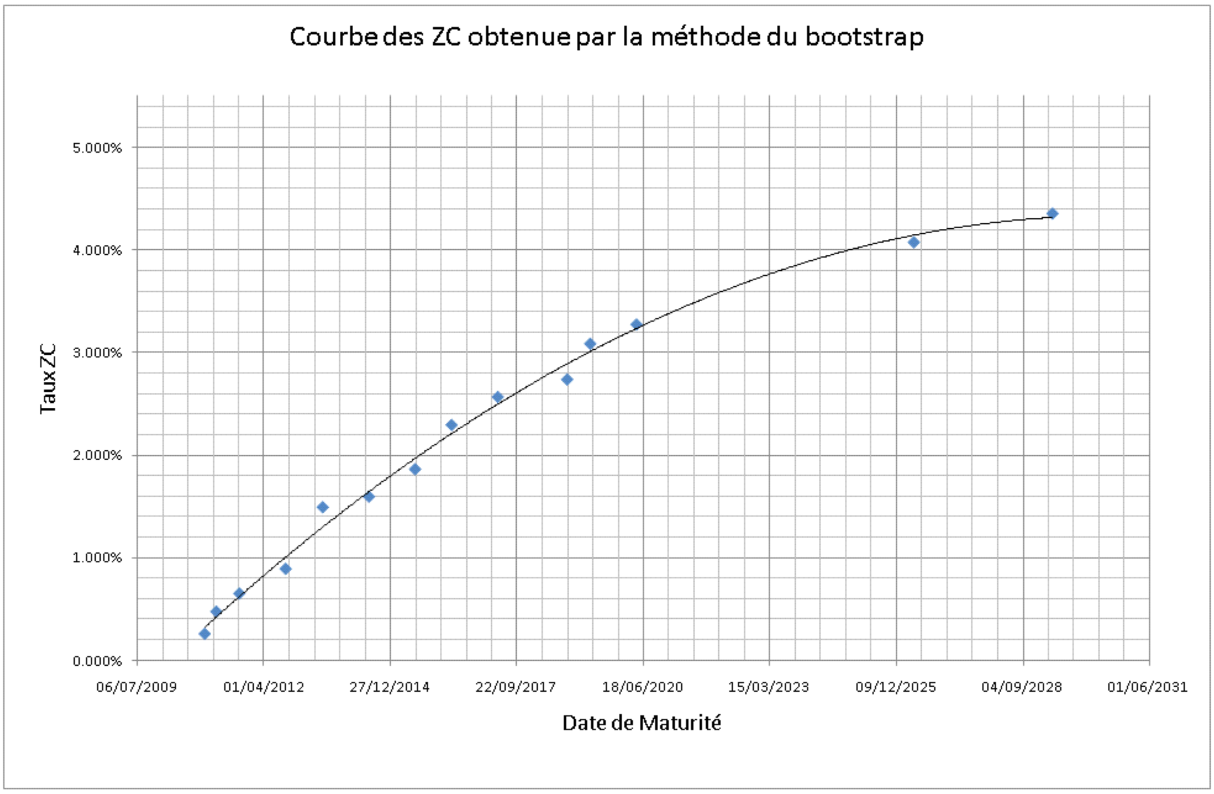
A partir de l'obligation 4, il est nécessaire d'utiliser l'algorithme du bootstrap. Les taux ZC pour actualiser chaque tombée de coupon intermédiaire de l'obligation 4 sont connus ou alors interpolés linéairement si les jours ne sont pas exactement les mêmes. Il est donc facile de trouver le taux ZC de maturité 2Y.

Pour les obligations 13 et 14, il a été nécessaire de procéder par dichotomie. En effet, pour l'obligation de maturité 25/04/2026, ne disposant pas des taux zéro-coupon entre les années 2020 et 2026, il a été nécessaire d'évaluer les taux ZC entre 2020 et 2026 par une interpolation linéaire à partir des données à disposition. Connaissant ce taux maturité 2026 probable, nous avons interpolé linéairement les taux entre l'année 2020 à 2026, puis nous avons recalculé le taux ZC 2026. Un nouveau taux ZC maturité 2026 ayant été trouvé, nous avons réajusté les taux ZC des dates 2020 à 2026 puis recalculé le taux ZC jusqu'à trouver un équilibre.

Nous avons obtenu la courbe ZC des taux zéro-coupon ci-dessous

Courbe ZC		
Année	Date	Taux ZC
3m	23/12/2010	0.254%
6m	24/03/2011	0.472%
1y	22/09/2011	0.648%
2y	22/09/2012	0.889%
2.8y	12/07/2013	1.490%
3.8y	12/07/2014	1.593%
4.8y	12/07/2015	1.860%
5.5y	25/04/2016	2.292%
6.5y	25/04/2017	2.566%
7.5y	25/10/2018	2.736%
8.5y	25/04/2019	3.085%
9.5y	25/04/2020	3.272%
15.5y	25/04/2026	4.075%
18.5y	25/04/2029	4.355%

Tableau 2 - Courbe ZC obtenue par la méthode du bootstrap



Graphique 6 - Graphique de la courbe ZC obtenue par la méthode du bootstrap

Nous allons maintenant rentrer dans la pratique et expliquer comment la courbe des taux est recréée.

II. La courbe des taux en pratique

Le principal objectif des traders et des sales en salle des marchés est de valoriser les produits de taux le plus précisément possible. Pour cela, ils ont besoin de la courbe des taux zéro-coupon. Cependant, les opérateurs n'utilisent pas la courbe des taux zéro-coupon présentée ci-dessus, ils utilisent ce qui est appelée la courbe LIBOR. Cette courbe, appelée aussi courbe de SWAP, est généralement considérée comme la courbe des taux sans risque dans l'évaluation des actifs dérivés. En effet, nous avons vu que pour des raisons économiques, les traders utilisent les taux -IBOR comme des taux sans risque. La courbe SWAP va donc être constituée d'instruments basés sur les taux -IBOR.

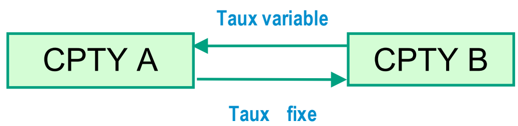
A. Les swaps de taux

1. Définition

Le swap est un des produits vanille le plus traité dans les salles des marchés. C'est une opération OTC entre deux contreparties qui s'engagent à payer, pour l'une, des cash-flows égaux aux intérêts à taux fixe/variable sur un principal donné, pendant un certain nombre d'années, et pour l'autre, des cash-flows égaux aux intérêts à taux fixe/variable sur le même principal pendant la même durée.

Il y a en fait deux opérations appelées deux jambes, pour un swap taux fixe par exemple :

- La contrepartie A paie à B le taux fixe portant sur un nominal et sur une durée donnée.
- La contrepartie B paie à A le taux variable portant sur le même nominal et sur la même durée.



Il n'y a échange de notionnel ni à l'émission, ni à maturité du swap. En fait, si la monnaie est la même entre les deux opérations, seuls se font les échanges d'intérêts à chaque échéance de taux.

Les principales caractéristiques du swap sont : le notionnel, le type d'amortissement, la date de départ, la maturité, la fréquence de calcul, les bases de calcul, l'index de référence (le plus courant dans les swaps de taux est le taux LIBOR) et le taux de swap.
Le taux de swap est le taux pour lequel, à la date de départ, le MtoM de la pate fixe est égal au MtoM de la pate variable.

2. Le swap de taux comme couverture de taux

Le swap de taux peut être utilisé par une entreprise comme couverture de taux. En effet, une entreprise endettée à taux variable et anticipant une hausse des taux peut transformer son endettement à taux variable en un endettement à taux fixe.

Avantages	Inconvénients
Le taux est connu à l'avance	Le client ne participe pas à la baisse des taux

Tableau 3- Avantages et Inconvénients d'un swap taux fixe

Dans ce swap, la banque reçoit le taux fixe et paie le taux variable. Le swap permet à l'entreprise de figer son taux d'endettement.

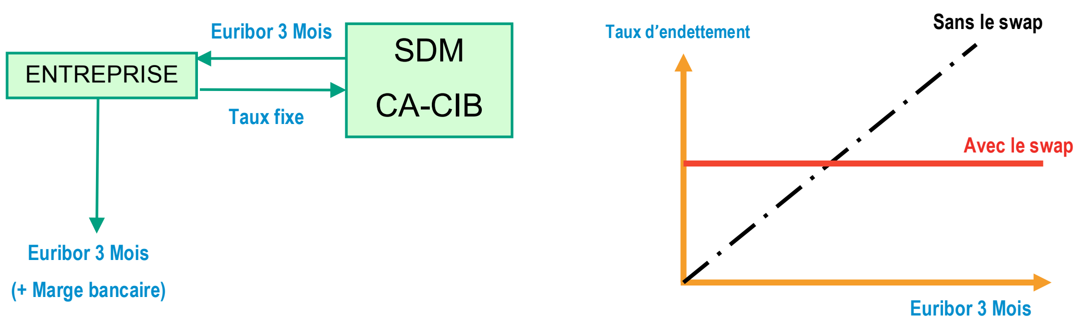


Figure 1- Mécanisme d'un swap taux fixe

Suivant la valeur de l'Index, la banque ou l'entreprise paiera le différentiel entre le taux fixe et la valeur de l'index.

Prenons un exemple dans le cas où un client, indexé sur l'Euribor 3 mois, choisit de se couvrir avec un SWAP de taux à 3.08% :

Si Euribor 3 Mois =	Taux payé au titre du crédit (A)	Echange d'interêts au titre de la couverture			Taux payé (A+B)
		Euribor 3 Mois	Taux du swap	Différentiel payé (B)	
1.00%	1.00%	*1.00%*	*3.08%*	2.08%	**3.08%**
2.00%	2.00%	*2.00%*		1.08%	**3.08%**
3.00%	3.00%	*3.00%*		0.08%	**3.08%**
4.00%	4.00%	*4.00%*		-0.92%	**3.08%**
5.00%	5.00%	*5.00%*		-1.92%	**3.08%**

Tableau 4 - Mécanisme des échanges d'intérêts lors d'un swap taux fixe

Ce tableau permet de montrer le mécanisme de paiement du différentiel par l'une des deux parties. Suivant la valeur du sous-jacent, c'est la banque ou l'entreprise B qui devra payer le différentiel.

Le swap peut aussi être utilisé par les ALM des banques afin de se couvrir lorsqu'elles réalisent des émissions à taux variable par exemple. En effet, les banques se rémunèrent à Euribor 3 mois + xx bps mais réalisent des émissions ou accordent des emprunts à taux fixe. Elles sont donc soumises à un risque de taux. Pour supprimer ce risque, les banques réalisent des swaps afin de transformer les revenus fixes qu'elles reçoivent en revenus variables. Cela permet de fixer leur marge.

3. Valorisation d'un swap taux fixe contre variable : application pratique

La valeur d'un swap taux fixe contre variable est obtenue en calculant la valeur de la jambe fixe et la valeur de la jambe variable.

a) Le calcul de la jambe fixe

Les flux de la jambe fixe sont connus à l'avance puisque le taux fixe est connu à l'émission de swap. Pour calculer la valeur de la jambe fixe, il suffit de connaître la valeur actuelle nette des flux certains futurs. En effet la valeur de la jambe fixe n'est que la somme des flux futurs actualisés à aujourd'hui. Les calculs se décomposent comme ceci :

$$Flux_t = Nominal_t * \frac{Nbj_{t-1 \to t}}{360} * Taux$$

$$Flux\ actualisé_t = Nominal_t * \frac{Nbj_{t-1 \to t}}{360} * Taux * DF_{t-1 \to t}$$

$$Valeur\ de\ la\ jambe\ fixe = \sum_{t=0}^{T} Flux\ actualisé_t$$

En première approximation, on considère que le nombre de jours dans un mois est de 30. Cependant, ce n'est pas toujours le cas et la base de calcul est un élément important et qui modifie plus ou moins la valeur de chaque pate. Les différentes bases de calculs, ainsi que les conventions de jours, sont expliquées dans l'Annexe A, B et C.

Afin de montrer que cette base de calcul n'est pas neutre, nous exécuterons les calculs pour deux bases différentes, la base 30/360 et la base exact/360.

<u>Exemple :</u> Calcul de la valeur de la jambe fixe d'un flux de 2.50% chaque trimestre.

Nominal : 1, 000,000 € in fine

Date de départ : 02/09/2010 - Date de fin : 02/09/2013

Le niveau du taux fixe : 2.50% - La fréquence de paiement : trimestrielle

- Si la base de calcul est Exact/360, convention Modified Following :

StartDate	**EndDate**	**Notionals**	**FixRate**	**DiscountFactor**	**Nbr de Jours**	**Valeur actualisé**
2 Sep 10	2 Dec 10	1,000,000	**2.50%**	0.9977	91	6,305.13 €
2 Dec 10	2 Mar 11	1,000,000	**2.50%**	0.9956	90	6,222.45 €
2 Mar 11	2 Jun 11	1,000,000	**2.50%**	0.9931	92	6,344.78 €
2 Jun 11	2 Sep 11	1,000,000	**2.50%**	0.9905	92	6,328.50 €
2 Sep 11	2 Dec 11	1,000,000	**2.50%**	0.9880	91	6,243.37 €
2 Dec 11	2 Mar 12	1,000,000	**2.50%**	0.9852	91	6,225.98 €
2 Mar 12	4 Jun 12	1,000,000	**2.50%**	0.9822	94	6,411.69 €
4 Jun 12	3 Sep 12	1,000,000	**2.50%**	0.9792	91	6,187.82 €
3 Sep 12	3 Dec 12	1,000,000	**2.50%**	0.9748	91	6,160.34 €
3 Dec 12	4 Mar 13	1,000,000	**2.50%**	0.9700	91	6,129.80 €
4 Mar 13	3 Jun 13	1,000,000	**2.50%**	0.9649	91	6,097.48 €
3 Jun 13	2 Sep 13	1,000,000	**2.50%**	0.9595	91	6,063.43 €
					MtoM	***74,720.76 €***

Tableau 5 - Détails du calcul de la jambe fixe en Exact/360

Le tableau 6 utilise les mêmes données mais avec une autre base de calcul.

- Si la base de calcul est 30/360, Modified Following :

StartDate	EndDate	Notionals	FixRate	DiscountFactor	Nbr de Jours	Valeur actualisé
2 Sep 10	2 Dec 10	1,000,000	**2.50%**	0.9977	90	6,235.84 €
2 Dec 10	2 Mar 11	1,000,000	**2.50%**	0.9956	90	6,222.45 €
2 Mar 11	2 Jun 11	1,000,000	**2.50%**	0.9931	90	6,206.85 €
2 Jun 11	2 Sep 11	1,000,000	**2.50%**	0.9905	90	6,190.92 €
2 Sep 11	2 Dec 11	1,000,000	**2.50%**	0.9880	90	6,174.76 €
2 Dec 11	2 Mar 12	1,000,000	**2.50%**	0.9852	90	6,157.57 €
2 Mar 12	4 Jun 12	1,000,000	**2.50%**	0.9822	92	6,275.27 €
4 Jun 12	3 Sep 12	1,000,000	**2.50%**	0.9792	89	6,051.82 €
3 Sep 12	3 Dec 12	1,000,000	**2.50%**	0.9748	90	6,092.64 €
3 Dec 12	4 Mar 13	1,000,000	**2.50%**	0.9700	91	6,129.80 €
4 Mar 13	3 Jun 13	1,000,000	**2.50%**	0.9649	89	5,963.47 €
3 Jun 13	2 Sep 13	1,000,000	**2.50%**	0.9595	89	5,930.16 €
					MtoM	***73,631.56 €***

Tableau 6 - Détails du calcul de la jambe fixe en 30/360

Nous pouvons voir dans les tableaux 5 et 6 que la base de calcul est très importante. La différence est de 1089.20 € soit environ 1.50% du nominal ce qui est énorme puisque, en général, les taux sont calculés à l'euro prêt.

b) Le calcul de la jambe variable

Le calcul de la jambe variable fait intervenir une donnée nouvelle, les forwards.

Comme nous allons le voir, il est possible de calculer les forwards grâce à la courbe des discounts factors. En effet, le forward et les discounts factors sont reliés par la formule suivante :

$$Forward_{3m}(t) = \left(\frac{df(t)}{df(t+3m)} - 1\right) * \frac{1}{dt}$$

Ainsi, un forward ne peut-être calculé qu'à partir du discount factor de la période précédente et du discount factor de la période actuelle.

La nouvelle donnée n'en est plus une, on peut donc calculer les forwards à partir des tableaux précédents et donc calculer la valeur de la jambe variable :

$$Flux_t = Nominal_t * \frac{Nbj_{t-1 \to t}}{360} * Forward_{t_0}(t)$$

$$Flux\ actualisé_t = Nominal_t * \frac{Nbj_{t-1 \to t}}{360} * Forward_{t_0}(t) * DF_{t-1 \to t}$$

$$Valeur\ de\ la\ jambe\ variable = \sum_{t=0}^{T} Flux\ actualisé_t$$

StartDate	EndDate	Notionals	Nbr de Jours	DiscountFactor	Forwards	Valeur actualisé
02/09/2010	02/12/2010	1,000,000	91	0.997746165	0.88483023	2,231.61 €
02/12/2010	02/03/2011	1,000,000	90	0.995444651	0.924818668	2,301.51 €
02/03/2011	02/06/2011	1,000,000	92	0.992988661	0.967825212	2,455.99 €
02/06/2011	02/09/2011	1,000,000	92	0.990457616	0.999950884	2,531.05 €
02/09/2011	02/12/2011	1,000,000	91	0.98787466	1.034370656	2,582.96 €
02/12/2011	02/03/2012	1,000,000	91	0.985148366	1.094793599	2,726.29 €
02/03/2012	04/06/2012	1,000,000	94	0.982174013	1.159788139	2,974.35 €
04/06/2012	03/09/2012	1,000,000	91	0.979130485	1.229696316	3,043.53 €
03/09/2012	03/12/2012	1,000,000	91	0.975775756	1.360092507	3,354.73 €
03/12/2012	04/03/2013	1,000,000	91	0.972257192	1.431678322	3,518.56 €
04/03/2013	03/06/2013	1,000,000	91	0.968576649	1.503277047	3,680.54 €
03/06/2013	02/09/2013	1,000,000	91	0.964736065	1.574888684	3,840.58 €
					MtoM	***35,241.71 €***

Tableau 7 - Détails du calcul de la jambe variable en Exact/360

4. Le taux de swap

Lorsqu'un client demande une cotation de swap, il cherche souvent à trouver le taux fixe tel qu'il n'ait pas à payer de soulte de mise en place. En fait, le vendeur doit chercher le taux fixe tel que la valeur de la jambe variable et celle de la jambe fixe soient identiques(au signe prêt). Ce taux est appelé taux de swap. Ici, dans notre exemple, 2.50% n'est pas le bon taux fixe puisque la valeur de la jambe variable (en base exact/360 : 74,720.76 €) est différente de la valeur de la jambe fixe (en base exact/360 : 35,241.71 €).

Par dichotomie, la valeur du taux de swap est obtenue. Le tableau 8 montre que le taux de 1.179% est le taux de swap tel que la jambe fixe ait la même valeur que la jambe variable.

StartDate	EndDate	Notionals	FixRate	DiscountFactor	Nbr de Jours	Valeur actualisé
2 Sep 10	2 Dec 10	1,000,000	**1.179%**	0.9977	91	2,974.00 €
2 Dec 10	2 Mar 11	1,000,000	**1.179%**	0.9956	90	2,935.01 €
2 Mar 11	2 Jun 11	1,000,000	**1.179%**	0.9931	92	2,992.70 €
2 Jun 11	2 Sep 11	1,000,000	**1.179%**	0.9905	92	2,985.03 €
2 Sep 11	2 Dec 11	1,000,000	**1.179%**	0.9880	91	2,944.87 €
2 Dec 11	2 Mar 12	1,000,000	**1.179%**	0.9852	91	2,936.67 €
2 Mar 12	4 Jun 12	1,000,000	**1.179%**	0.9822	94	3,024.27 €
4 Jun 12	3 Sep 12	1,000,000	**1.179%**	0.9792	91	2,918.67 €
3 Sep 12	3 Dec 12	1,000,000	**1.179%**	0.9748	91	2,905.71 €
3 Dec 12	4 Mar 13	1,000,000	**1.179%**	0.9700	91	2,891.30 €
4 Mar 13	3 Jun 13	1,000,000	**1.179%**	0.9649	91	2,876.06 €
3 Jun 13	2 Sep 13	1,000,000	**1.179%**	0.9595	91	2,860.00 €
					MtoM	***35,244.29 €***

Tableau 8 - Détails du calcul de la jambe fixe en Exact/360 - Recherche du taux de swap

Nous voyons donc clairement que le swap ne nécessite pas de modèle particulier pour le pricer car seul le mécanisme d'actualisation est utilisé. Cependant, pour les options vanilles, ce mécanisme d'actualisation n'est pas suffisant, car pour qui être pricées les options nécessitent de disposer d'un modèle de taux.

B. Les FRA et les Futures

1. Les FRA

Les FRA ou Future Rate Agreement est un contrat à terme de gré à gré par lequel le vendeur du FRA garantit à l'acheteur, au terme d'une période donnée, un taux négocié pour un emprunt d'un montant et d'une durée négociés.
Le FRA est dissocié de l'opération de prêt ou d'emprunt sous-jacente, ce qui signifie que l'acheteur du FRA pourra parfaitement emprunter auprès d'une autre contrepartie que le vendeur.

Le FRA est un contrat forward basé sur un taux d'intérêt. Le sous-jacent est le taux d'intérêt. Les FRA sont donc parfaits pour connaitre les forwards de taux.

Sur les marchés, les FRA ont des conventions de notation particulières, ils sont notés AXB avec B>A, signifiant :

- La période de référence commence dans A mois + 2 jours ouvrés
- Elle dure B-A mois.

Par exemple : 1X4 désigne une période de 3 mois commençant dans un mois et le 2X5 désigne une période de 3 mois commençant dans 2 mois.

2. Les futures

Les futures sont des contrats à terme dont la finalité est la même que le FRA. Ce sont les instruments financiers les plus traités au monde.
Les futures sur l'Euribor 3 mois sont des futures dont le sous-jacent est l'Euribor 3 Mois tel que mesuré et publié le dernier jour de cotation du contrat.

Comme tous les taux LIBOR, le taux mesuré est un taux spot, c'est-à-dire calculé avec une date de départ de deux jours ouvrés après la date de mesure et une date de fin de trois mois calendaires, en tenant compte des conventions de jours et de base habituels, soit pour l'Euribor, une base annuelle de 360 jours.

Contrairement au FRA, le prix du future est de la forme :

$$\text{Prix} = 100 * (1 - \text{Taux in Fine})$$

Les échéances sont H,M,U et Z soit mars, juin, septembre et décembre. En pratique, les traders utilisent les 4 échéances sur 2 ans.

3. Différence entre FRA et futures

Plus leur échéance est éloignée dans le temps et plus les contrats à terme sur IBOR 3 mois sont différents des FRA qu'ils sont pourtant censés répliquer.

En effet, dans le cas des futures, les variations de taux in fine donnent lieu au paiement immédiat et linéaire de la différence de prix, via l'appel de marges. Les FRA, quant à eux, ne peuvent provoquer que des gains ou des pertes dans l'avenir, qu'il convient donc d'actualiser et dont la valeur actuelle, non linéaire, possède une convexité supérieure à celle des futures.
Cela implique que si les deux instruments avaient le même taux in fine, il existerait un arbitrage sans risque à acheter en grande quantité un FRA éloigné, vendre le future correspondant et ajuster la position en risque de taux chaque jour en profitant donc de la volatilité du marché. Afin de neutraliser ce phénomène, les futures doivent donc avoir un taux supérieur à celui des FRA et ce, de manière croissante avec l'éloignement dans le temps.
La différence de taux entre les deux instruments s'appelle en anglais convexity bias, soit donc : correction à apporter compte tenu des convexités différentes. Elle n'est malheureusement pas calculable directement et relève d'hypothèses sur la volatilité future des taux d'intérêt à court terme.

C. La courbe SWAP

Comme indiqué dans l'introduction à cette partie, la courbe SWAP, ou courbe zéro-coupon Libor est utilisée par les opérateurs comme courbe des taux sans risque lorsqu'ils évaluent des actifs dérivés.

En pratique, la courbe swap est obtenue en agglomérant différents instruments disponibles sur le marché, des instruments court terme et des instruments long terme. En effet, la courbe est déterminée à partir de la cotation des taux de dépôts pour la partie court terme, des futures (ou FRA) sur taux LIBOR pour les maturités intermédiaires et des swaps sur LIBOR, pour la partie long terme.

Voici, en exemple, des instruments qui sont utilisés pour créer une courbe EURIBOR :

- Taux overnight et taux de dépôt LIBOR 1 semaine, 2 semaines, 1 mois, 2 mois et 3 mois
- 8 premiers contrats Futures ou FRA
- Swaps de maturités 3,4,5,6,7,8,9,10,12,15,20,30,40 et 50 ans.

Market Data			Code Reuters	Instrument
Type	Maturity	Contrib		
DEPOSIT	O/N	0.78	EUROND	EONIA
DEPOSIT	1W	0.734	EURIBORSWD	EURIBOR 1 WEEK
DEPOSIT	2W	0.748	EURIBOR2WD	EURIBOR 2 WEEK
DEPOSIT	1M	0.777	EURIBOR1MD	EURIBOR 1 MOIS
DEPOSIT	2M	0.836	EURIBOR2MD	EURIBOR 2 MOIS
DEPOSIT	3M	0.993	EURIBOR3MD	EURIBOR 3 MOIS
FUTURE	DEC10	98.9025	0#FEIcm	FUTURE DEC10
FUTURE	MAR11	98.8275		FUTURE MAR11
FUTURE	JUN11	98.7725		FUTURE JUN11
FUTURE	SEP11	98.7275		FUTURE SEP11
FUTURE	DEC11	98.6475		FUTURE DEC11
FUTURE	MAR12	98.5775		FUTURE MAR12
FUTURE	JUN12	98.4975		FUTURE JUN12
FUTURE	SEP12	98.4125		FUTURE SEP12
SWAP	3Y	1.615	EURAB3E3Y=	SWAP 3Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	4Y	1.801	EURAB3E4Y=	SWAP 4Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	5Y	1.987	EURAB3E5Y=	SWAP 5Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	6Y	2.167	EURAB3E6Y=	SWAP 6Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	7Y	2.326	EURAB3E7Y=	SWAP 7Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	8Y	2.464	EURAB3E8Y=	SWAP 8Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	9Y	2.58	EURAB3E9Y=	SWAP 9Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	10Y	2.68	EURAB3E10Y=	SWAP 10Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	12Y	2.846	EURAB3E12Y=	SWAP 12Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	15Y	2.999	EURAB3E15Y=	SWAP 15Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	20Y	3.088	EURAB3E20Y=	SWAP 20Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	25Y	3.042	EURAB3E25Y=	SWAP 25Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	30Y	2.93	EURAB3E30Y=	SWAP 30Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	40Y	2.779	EURAB3E40Y=	SWAP 40Y VS EURIBOR 3 MOIS
SWAP	50Y	2.734	EURAB3E50Y=	SWAP 50Y VS EURIBOR 3 MOIS

Tableau 9 - Données de marché le 18/10/2010

La courbe dont les données sont dans le tableau 9 est la courbe de marché. Il est aussi possible de rajouter les FRA qui peuvent être aussi utilisés pour recréer la courbe SWAP.

A partir de ces données, les traders reconstruisent les courbes que les opérateurs utilisent pour pricer les produits de taux.

La courbe SWAP est reconstituée pas à pas :

C'est le FRA 1x4 qui est utilisé en premier car il n'utilise que le forward 1 mois du sous-jacent pour sa valorisation. L'élément 1 mois de la courbe SWAP est déterminé de telle sorte que le FRA 1x4 calculé corresponde au prix de marché. C'est ensuite le FRA 2x5 qui est utilisé et ainsi de suite jusqu'à obtenir une courbe jusqu'à la maturité 2 ans.

Tous les éléments peuvent être utilisés pour construire la courbe mais dans certains cas il est préférable de ne pas utiliser certaines des données. Pour connaître les éléments à utiliser, un ensemble de FRA est calculé et comparé au prix de marché afin de calculer coefficient d'erreur est obtenu. Le trader choisit les données à utiliser afin de minimiser le coefficient d'erreur. Ainsi, il apparait que certains FRA ou futures doivent être négligés afin d'obtenir une meilleure courbe.

III. Le modèle de Black : pricing d'options vanilles

A. Le modèle de Black : théorie

Depuis le début des années 80, les options vanilles sur actions ou indices sont bien connues et peuvent être modélisées en utilisant le modèle de Black & Scholes. Ainsi, dès l'apparition des options sur taux, les professionnels ont utilisé une variante du modèle de Black & Scholes, appelé le modèle de Black (1976).

Le modèle de Black consiste en cette équation :

$$dF\left(t, T_{j-1,} T_{j,}\right) = F\left(t, T_{j-1,} T_{j,}\right)\sigma_j d\widehat{W}^{T_j}(t)$$

Où σ_j est la volatilité du $j^{\text{ème}}$ caplet , floorlet ou swaplet

1. Les options vanilles : caps, floor et swaption

- Le **CAP** : Le cap est un contrat de gré à gré qui permet à son acheteur de se couvrir contre une hausse de son taux de référence pendant une période déterminée.

A chaque constat, si le niveau du taux de référence constaté est supérieur au prix d'exercice, l'acheteur du cap reçoit du vendeur le différentiel de taux.

Le cap a deux utilisations possibles :

- un cap est acheté pour se couvrir contre une hausse des taux. Il est utilisé dans le cadre d'une couverture de taux. (voir exemple)
- un cap est vendu dans le cadre d'un produit structuré afin de récupérer de la valeur. Cependant, le vendeur du cap s'engage à donner à l'acheteur le différentiel de taux si le spot est inférieur au strike.

Exemple : Le client choisi un CAP sur Euribor 3 Mois à 4.02% :

Si Euribor 3 Mois =	Taux payé au titre du crédit (A)	Echange d'interêts au titre de la couverture			Taux payé (A+B)
		Euribor 3 Mois	Taux du cap	Différentiel payé (B)	
1.00%	1.00%	*1.00%*	*4.02%*	0.00%	**1.00%**
2.00%	2.00%	*2.00%*		0.00%	**2.00%**
4.00%	4.00%	*4.00%*		0.00%	**4.00%**
5.00%	5.00%	*5.00%*		-0.98%	**4.02%**
6.00%	6.00%	*6.00%*		-1.98%	**4.02%**

Tableau 10 - Mécanisme des échanges d'intérêts lors d'un cap

Le client paye au maximum 4.02% et bénéficie totalement de la baisse des taux.

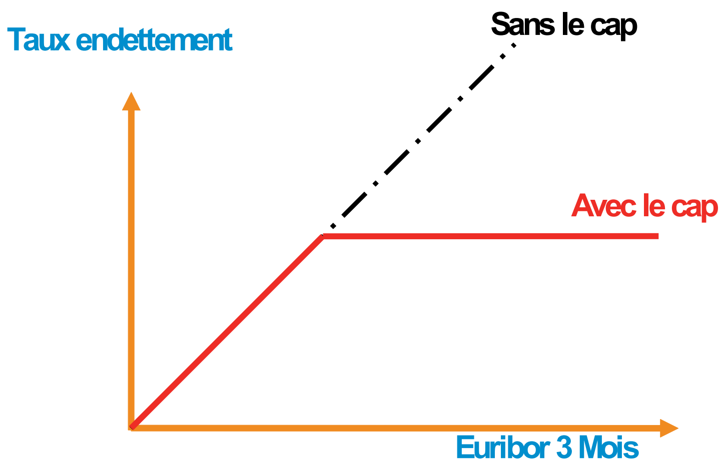


Figure 2 - Mécanisme d'un cap

Avantages	Inconvénients
Le client profite de la baisse des taux Le client paye au maximum 4.02%	Le client paye une prime Le taux maximum est dans cet exemple supérieur à celui du SWAP

Tableau 11 – Avantages et Inconvénients d'un achat de cap de taux

- Le **FLOOR** : En général, cette stratégie n'est pas utilisée seule pour des couvertures de taux. L'achat d'un FLOOR permet de recevoir le différentiel entre le niveau du FLOOR et le niveau de l'index si celui-ci est inférieur au niveau du FLOOR

- Les **SWAPTIONS** : Le terme vient de la réunion des mots swap et option. Une swaption est le droit (et non l'obligation) d'acheter ou de vendre la possibilité de conclure un swap de taux d'intérêt à une date déterminée. C'est en fait une option dont le sous-jacent est un swap.

Les swaptions peuvent être utilisées par les entreprises pour se couvrir contre une hausse des taux probables futurs. Elles peuvent ne pas avoir intérêt à souscrire un swap maintenant, mais peuvent acheter une swaption permettant de leur donner à une date future, la possibilité d'entrer dans un swap de taux.

2. Démonstration de la formule de Black

Nous allons maintenant expliquer et démontrer la formule de Black puis nous expliquerons pourquoi ce modèle est utilisé. Dans cette démonstration nous chercherons à trouver la formule du cap. Nous déduirons de celle-ci, la formule du floor et de la swaption.

Nous utiliserons les notations décrites en Annexe D

Prenons un cap de strike E et de nominal 1€, ayant comme sous jacent l'Euribor dont sa valeur en t est notée $R^L(t,\delta)$. Avec δ le nombre de jours entre deux périodes de paiement.

On sait que la valeur d'un cap est définie par la somme des valeurs de ses caplet, c'est-à-dire la valeur actualisée de chaque flux incertain futur.

On a donc, la valeur du cap en t : $CAP_t = \sum_{j=1}^{n} Caplet_t^j$

Avec, la valeur en T_j du ième caplet :

$$Caplet_{T_i}^j = \left[\delta * \left(R^L(T_{j-1},\delta) - E\right)\right]^+ = \max\left[\delta * \left(R^L(T_{j-1},\delta) - E\right); 0\right]$$

Nous savons que sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, le prix actualisé des actifs est une martingale :

$$Caplet_t^j = E_t^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^{T_j} r(s)ds} * Caplet_{T_i}^j\right)$$

Nous allons définir une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}_{T_j}$, et pour se faire, voici le changement de probabilité réalisé.

Soit la densité de vraisemblance Y telle que :

$$Y = \frac{d\mathbb{Q}_{T_j}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{B(t, T_j)} * e^{-\int_t^{T_j} r(s)ds}$$

Cette nouvelle probabilité est appelée la probabilité forward neutre, c'est la probabilité sous laquelle les actifs actualisés par des zéros coupons sont des martingales.

On se retrouve, sous la probabilité $\mathbb{Q}_{T_j}$, avec une nouvelle formule du caplet :

$$Caplet_t^j = B(t, T_j) * E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(Caplet_{T_j}^j \right)$$

En remplaçant par la formule du caplet ci-dessus, nous avons :

$$Caplet_t^j = B(t, T_j) * E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(\left[\delta * \left(R^L(T_{j-1}, \delta) - E \right) \right]^+ \right)$$

$$Caplet_t^j = B(t, T_j) * E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(\left[\delta * \left(F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) - E \right) \right] * 1_{F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \geq E} \right)$$

$$Caplet_t^j = B(t, T_j) * E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(\left[\delta * F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \right] * 1_{F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \geq E} \right)$$

$$- B(t, T_j) * E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(E * 1_{F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \geq E} \right)$$

Nous allons calculer les deux morceaux de l'équation l'une après l'autre :

$$P1 = E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(1_{F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \geq E} \right)$$

$$P2 = E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(\left[F\left(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}\right) \right] * 1_{F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \geq E} \right)$$

$$P1 = E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(E * 1_{F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \geq E} \right) = E_t^{\mathbb{Q}_{T_j}} \left(1_{F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \geq E} \right)$$

$$P1 = \mathbb{Q}_{T_j}(F(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}) \geq E)$$

Cependant, on a :

$$dF\left(t, T_{j-1,} T_{j,}\right) = F\left(t, T_{j-1,} T_{j,}\right) \sigma_j d\widehat{W}^{T_j}(t)$$

$$F\left(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}\right) = F\left(t, T_{j-1,} T_{j,}\right) * e^{\left(-\frac{\sigma_j^2}{2}(T_{j-1} - t) + \sigma_j \left(W_{T_{j-1}} - W_t\right)\right)}$$

Or $F\left(T_{j-1,} T_{j-1,} T_{j,}\right) \geq E \sim (W_{T_{j-1}} - W_t) \geq \frac{1}{\sigma_j} (\ln \left(\frac{E}{F\left(t, T_{j-1,} T_{j,}\right)} \right) + \frac{\sigma_j^2}{2} (T_{j-1} - t))$

Or $W_{T_{j-1}} - W_t \sim U * \sqrt{T_{j-1} - t}$ *où* $U \sim N(0,1)$

On peut donc considérer cette nouvelle condition :

$$U \geq \frac{1}{\sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t}}\left(\ln\left(\frac{E}{F(t,T_{j-1,}T_{j,})}\right)+\frac{\sigma_j{}^2}{2}(T_{j-1}-t)\right) \text{où } U \sim N(0,1)$$

D'où :

$$P1 = \mathbb{Q}_{T_j}(F(T_{j-1,}T_{j-1,}T_{j,}) \geq E)$$

$$P1 = \mathbb{Q}_{T_j}(U \geq \frac{1}{\sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t}}\left(\ln\left(\frac{E}{F(t,T_{j-1,}T_{j,})}\right)+\frac{\sigma_j{}^2}{2}(T_{j-1}-t)\right))$$

$$P1 = 1-\mathbb{Q}_{T_j}\left(U \leq \left(\frac{\ln\left(\frac{E}{F(t,T_{j-1,}T_{j,})}\right)+\frac{\sigma_j{}^2}{2}(T_{j-1}-t)}{\sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t}}\right)\right)$$

$$P1 = 1-\varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{F(t,T_{j-1,}T_{j,})}\right)+\frac{\sigma_j{}^2}{2}(T_{j-1}-t)}{\sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t}}\right)$$

Où φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$P1 = \varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{F(t,T_{j-1,}T_{j,})}{E}\right)-\frac{\sigma_j{}^2}{2}(T_{j-1}-t)}{\sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t}}\right)$$

De la même façon, on calcul P2. On trouve donc la formule du cap :

$$CAP_t = \sum_{j=1}^{n} Caplet_t^j$$

$$CAP_t = \sum_{j=1}^{n} \delta * B(t,T_j) * \left[F(t,T_{j-1},T_j) * \varphi(d_j) - E * \varphi(d_j - \sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t})\right]$$

Pour le floor, nous avons de la même façon :

$$FLOOR_t = \sum_{j=1}^{n} \delta * B(t,T_j) * \left[E * \varphi(-d_j + \sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t}) - F(t,T_{j-1},T_j) * \varphi(-d_j)\right]$$

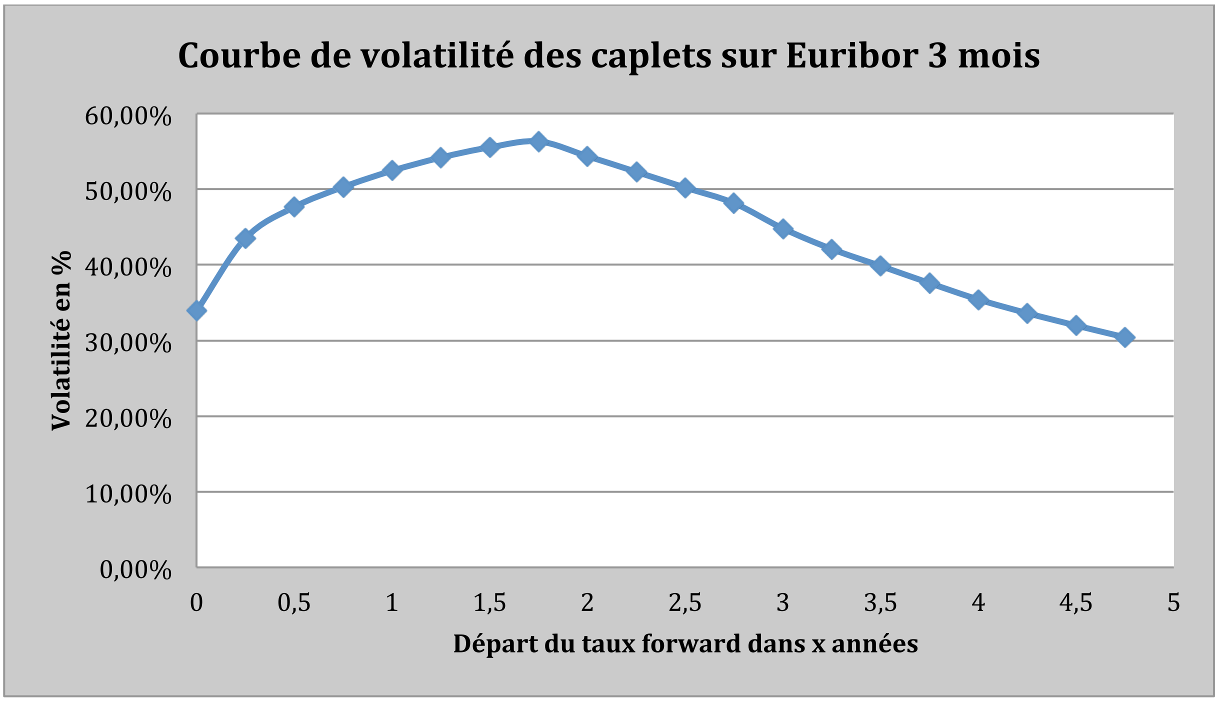
Pour les swaptions, nous avons :

$$SWAPTION_t = \sum_{j=1}^{n} \delta * B(t,T_j)\left(F_S(t) * \varphi(d) - F * \varphi(d - \sigma_S\sqrt{T_0 - t}\right)$$

Dans ces trois résultats, la volatilité entre en jeu : Il y a la volatilité du caplet, du floorlet et du swaplet.

3. Volatilité des caplets

Ces volatilités sont récupérables sur le marché. A partir des données de marché, il est donc possible de calculer les prix des options. Cependant, afin de coller au plus près au prix de marché, il est possible de faire des ajustements afin de minimiser l'écart des prix calculés avec les prix du marché.



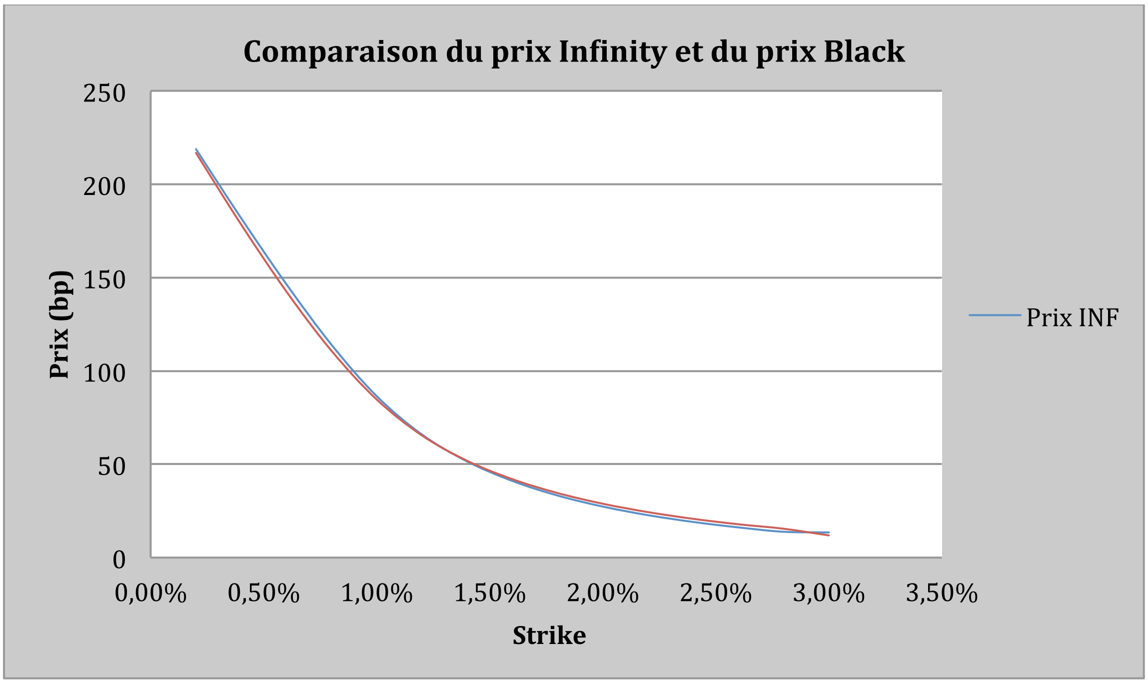
Graphique 7 – Courbe de volatilité des caplets sur Euribor 3 mois

B. Le modèle de Black : application pratique

Nous allons maintenant pricer un cap grâce au modèle de Black. En effet, nous possédons tous les éléments à imputer dans le modèle. Nous allons comparer nos prix aux prix Infinity qui est le logiciel de pricing de la banque pour les produits optionnels de taux. Nous considérerons que le prix Infinity correspond au prix de marché.

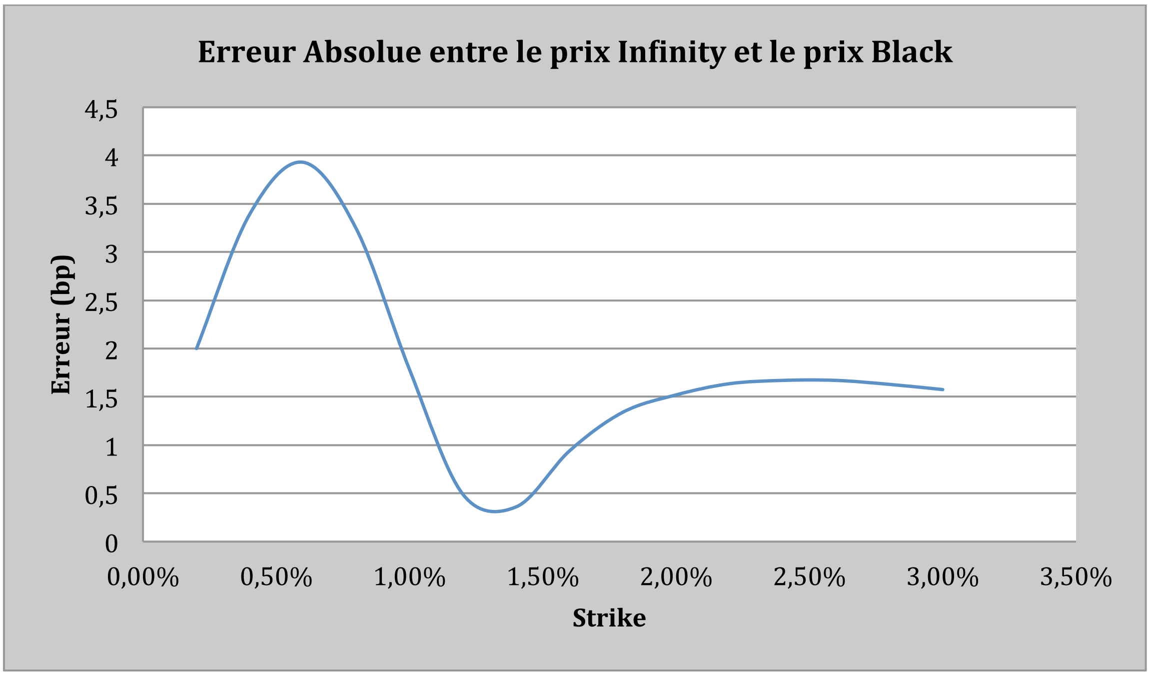
1. Pricing de l'option avec le modèle Black

Nous allons calculer pour différents strikes, le prix Black que nous comparerons avec le prix donné par Infinity.



Graphique 8 – Comparaison du prix Infinity et du prix Black

Le graphique 7 permet de voir que la méthode de Black est correcte et permet de bien pricer le cap. Cependant, on peut remarquer que pour certains strikes, le prix Black ne coïncide pas tout à fait avec les prix de marché.



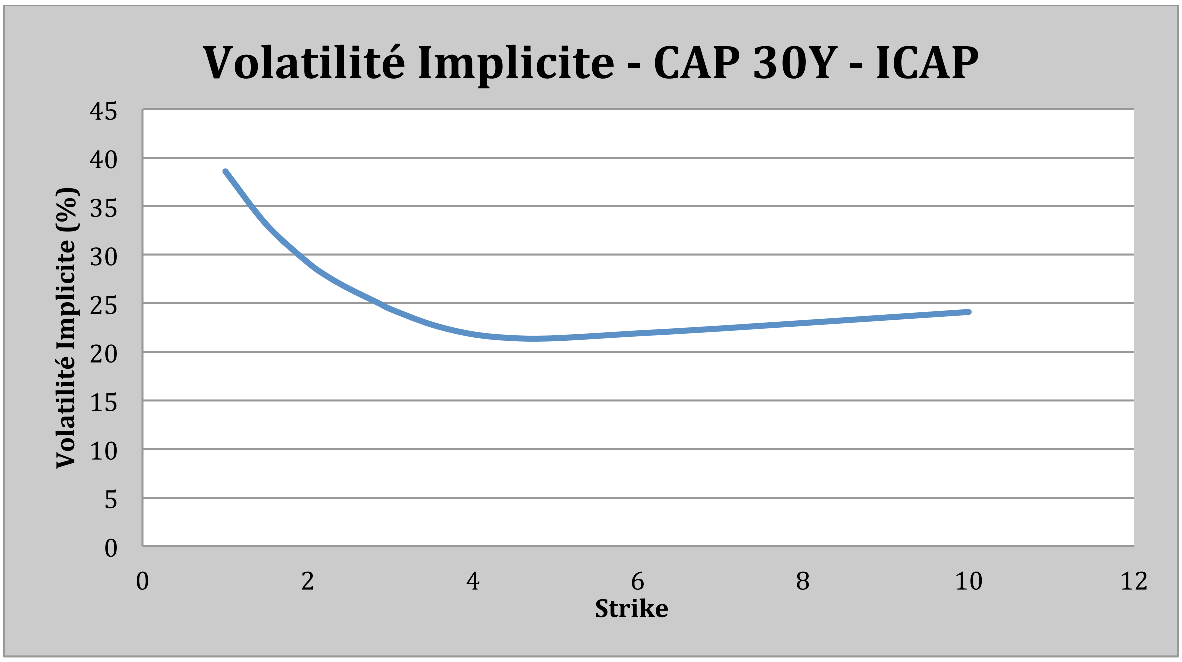
Graphique 9 – Erreur absolue entre le prix Infinity et le prix Black

Le graphique 9 permet de constater que dans/hors de la monnaie, l'erreur est beaucoup plus importante qu'à la monnaie. En effet, l'erreur presque 8 fois plus importante dans/hors de la monnaie qu'à la monnaie est expliquée par le mécanisme du smile de volatilité qui n'est pas incluse dans le modèle de Black.

Le smile de volatilité est apparu pour la première fois lors du crash d'Octobre 1987, qui montra qu'un marché pouvait baisser de 20% en une seule journée.

2. La volatilité Implicite

L'imprécision du phénomène bien connu du smile (nom donné en raison de la forme de la courbe). En effet, si l'on calcule la volatilité implicite de plusieurs options similaires pour plusieurs strike*s*, le phénomène du smile apparait. Nous nous apercevons que la volatilité n'est pas la même pour des strike*s* différents. Ainsi, hors de la monnaie, la volatilité est plus importante qu'à la monnaie.



Graphique 10 – Volatilité implicite – source ICAP

Nous allons maintenant étudier le modèle SABR développé en 2002 afin de vérifier s'il permet de corriger ce problème.

IV. Le modèle SABR (Sigma, Alpha, Bêta, Rhô)

A. Théorie

Les options vanilles de taux peuvent être pricées comme nous l'avons vu, par le modèle de Black. Dans le modèle de Black, il y a une relation bi-univoque entre le prix de l'option et le paramètre de volatilité. Ainsi, les options sont souvent pricées en imputant la volatilité implicite du marché. Dans le modèle de Black, la volatilité est constante alors qu'en pratique, des options de strike différent ont besoin de volatilités différentes pour concorder avec les prix de marché.

Dans les salles de marchés Fixed Income, il est nécessaire de modéliser correctement la volatilité. En effet, les desks de trading sont exposés sur un grand nombre de strike. Ainsi, utiliser différentes volatilités pour différents strike*s* rend impossible la gestion du risque en utilisant le modèle de Black. C'est pourquoi le modèle SABR a été créé afin de tenir compte du problème de smile.

Le modèle SABR est un modèle de volatilité stochastique dans lequel le taux forward et la volatilité sont corrélés. Ce modèle est très utilisé dans les salles des marchés car malgré son apparence complexe, la volatilité est donnée par une formule explicite qui est très facile à utiliser.
Cette méthode a d'autres avantages comme par exemple le fait de donner le bon Delta alors que dans d'autres modèles, le delta n'est pas exact.

Le modèle SABR est défini comme suit[4] [5] :

$$\begin{cases} dF = \sigma F^{\beta} dW^1 \\ d\sigma = \alpha \sigma dW^2 \\ dW^1 dW^2 = \rho dt \end{cases}$$

---

[4] http://www.math.ust.hk/~malwu/

[5] http://www.vif.ac.at/cuchiero/thesis.pdf

En fait, cet ensemble d'équations permet de corréler le forward F et la volatilité σ_β. Le modèle SABR peut être utilisé pour coïncider parfaitement avec la courbe de volatilité implicite observée sur le marché pour chaque date d'exercice unique. Pour des dates d'exercices multiples, il est nécessaire d'utiliser le modèle dynamique de SABR. Par ailleurs, ce modèle prédit une dynamique correcte de la courbe de volatilité.
Avec le modèle SABR, le prix du call est défini comme suit :

$$C(t,F,T,K) = B(t,T)(FN(d^+) - KN(d^-))$$

Avec :

$$d^{+/-} = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma_\beta^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_\beta\sqrt{T-t}}$$

Avec

$$\sigma_\beta(F,K) = \frac{\sigma}{(FK)^{\frac{1-\beta}{2}} * \left\{1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\ln\left(\frac{F}{K}\right)^2 + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\ln\left(\frac{F}{K}\right)^4 + \cdots\right\}} * \left(\frac{z}{x(z)}\right)$$

$$* \left\{1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\sigma^2}{(FK)^{(1-\beta)}} + \frac{1}{4}\frac{\rho\beta\sigma\alpha}{(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\alpha^2\right](T-t) + \cdots\right\}$$

$$\text{Avec :} \begin{cases} z = \frac{\alpha}{\sigma}(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}\ln\left(\frac{F}{K}\right) \\ x(z) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho}\right) \end{cases}$$

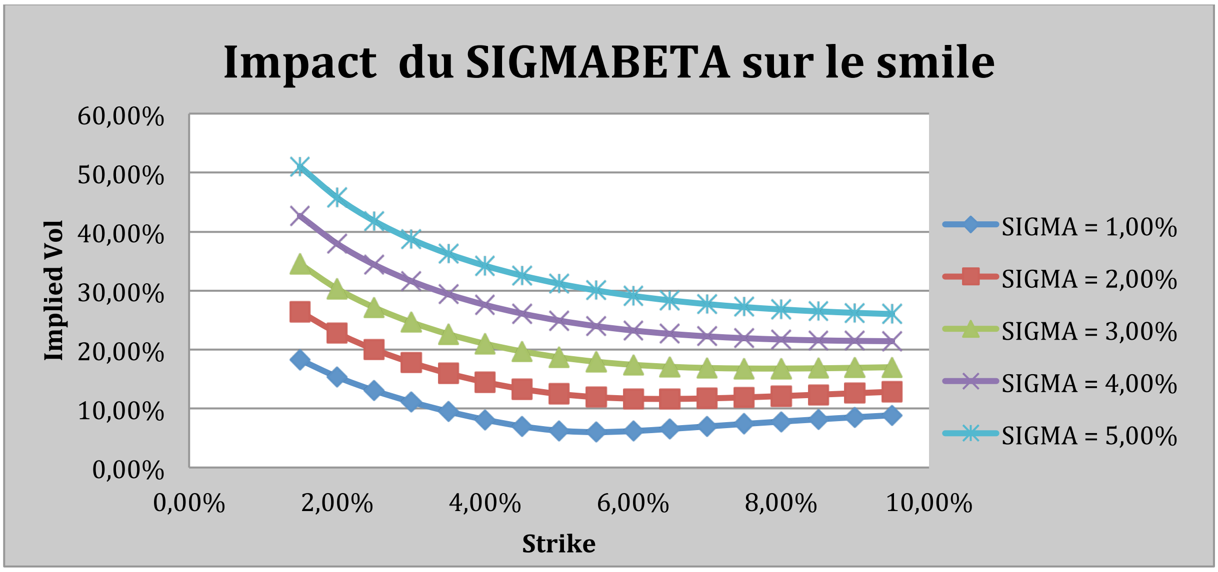
Les paramètres du modèle SABR permettent d'analyser la courbure et le smile de manière intuitive. En effet, chaque paramètre a un impact précis sur le smile.

B. Impact des paramètres

Les différents paramètres ont tous un impact sur la forme du smile. Cette partie a pour objectif de montrer graphiquement l'impact de ces paramètres.

Sigma : Il est donné ATM par le marché et il est lié à la volatilité ATM log-normale par la relation $\sigma = \sigma_{LN} F^{1-\beta}$

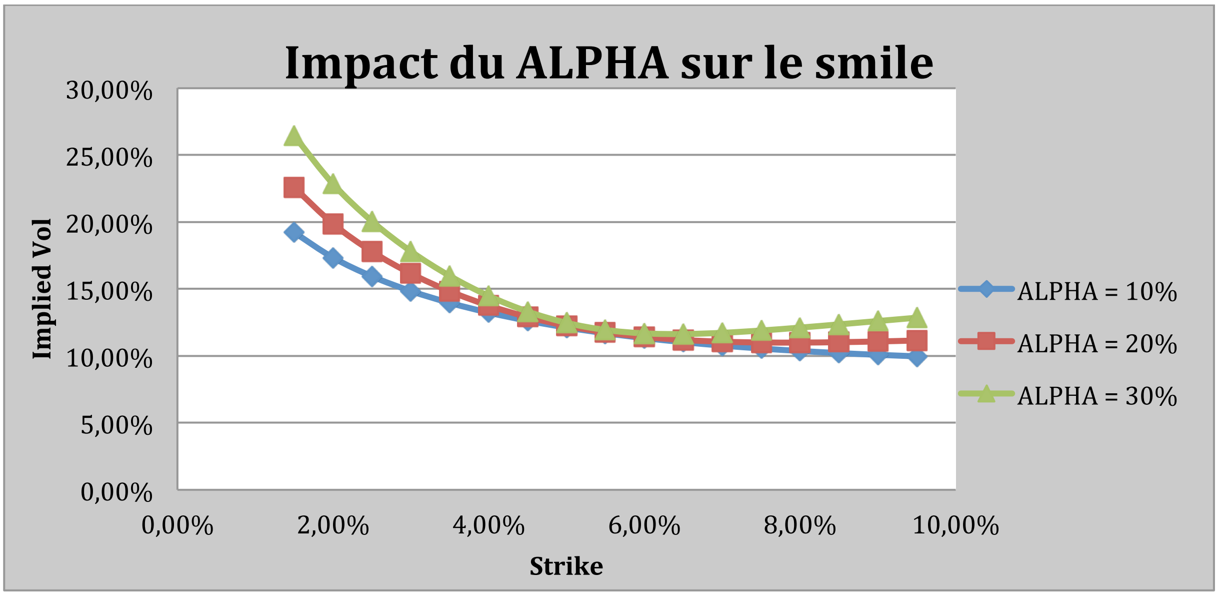
Exemple : F=5.00%, T=5, $\alpha = 30\%, \beta = 40\%, \rho = -20\%$



Graphique 11 – Impact du SIGMABETA sur le smile

Alpha : Ce paramètre contrôle la convexité du smile. On le calibre pour qu'il permette de suivre cette convexité.

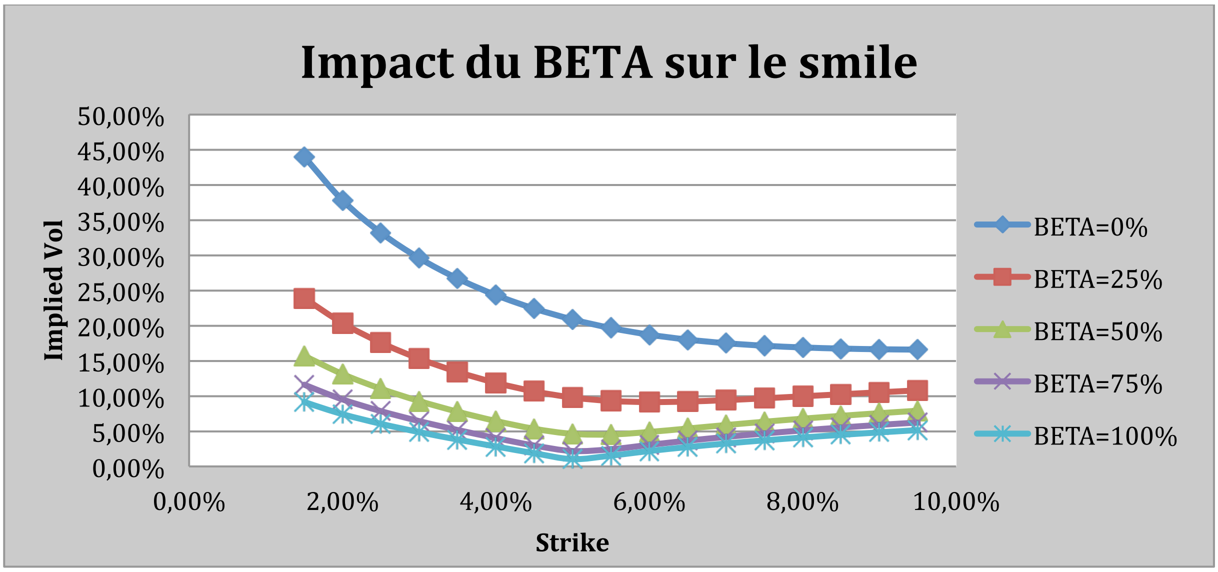
Exemple : F=5.00%, T=5, $\sigma = 2\%, \beta = 40\%, \rho = -20\%$



Graphique 12 – Impact du ALPHA sur le smile

Bêta : Ce paramètre contrôle la courbure. Il relie le niveau de volatilité à la valeur du sous-jacent.

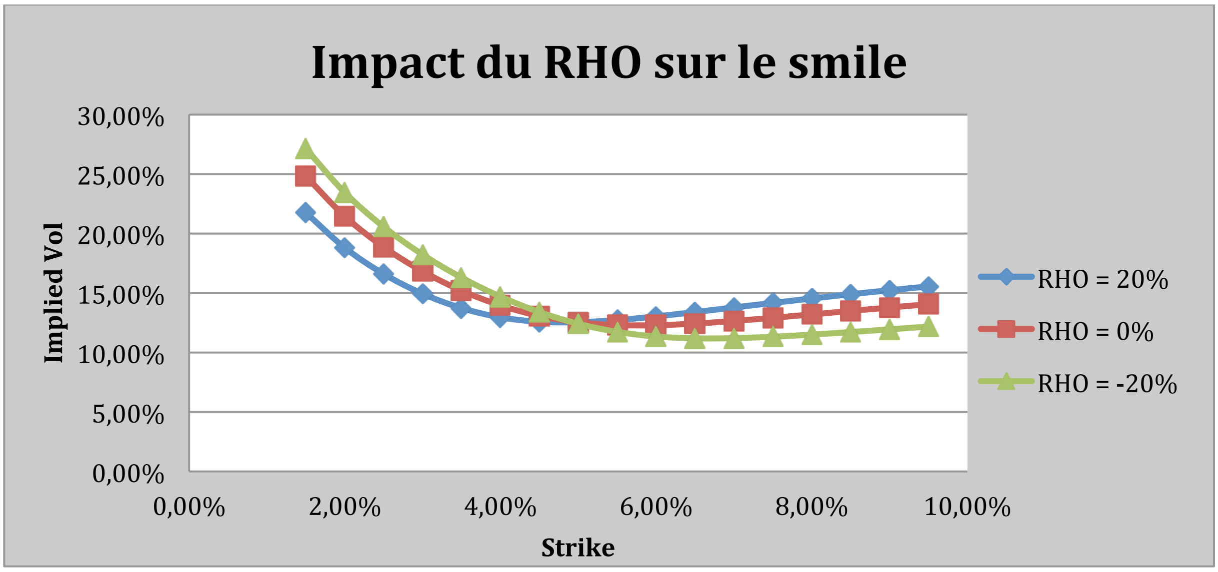
Exemple : F=5.00%, T=5, $\sigma = 2\%, \alpha = 30\%, \rho = -20\%$



Graphique 13 – Impact du BETA sur le smile

Rhô : Ce paramètre contrôle aussi la courbure. Il relie lui aussi la valeur du sous-jacent à la volatilité.

Exemple : F=5.00%, T=5, $\sigma = 2\%, \alpha = 30\%, \beta = 40\%$



Graphique 14 – Impact du RHO sur le smile

Nous pouvons constater que les deux derniers paramètres contrôlent la courbure et par là même comment choisir entre Rhô et Bêta. Le choix doit être fait en considérant un des paramètres importants pour les traders : le delta. En effet, le Rhô n'affecte pas le delta tandis que le Bêta a lui un impact. En pratique, les traders choisissent un bêta qui permet d'avoir un bon delta puis choisissent un Rhô qui permet d'avoir la courbure observée sur le marché.

C. Calibration et pricing de cap : application pratique

Dans cette dernière partie, nous allons vérifier la solidité de notre modèle SABR (codé en VBA) en comparant nos données à celles d'Infinity. Afin de rendre les calculs plus aisés, nous avons étudié un seul caplet. Ce calcul suffit à montrer l'intérêt du modèle SABR.

Nous avons procédé en quatre étapes :

- Détermination de la volatilité implicite de Black
- Détermination du sigma Beta
- Création de la courbe SABR
- Vérification du matching entre le prix Infinity et le prix SABR.

1. Détermination de la volatilité implicite de Black

Nous allons étudier un caplet de date de départ : 07/10/2010 et de maturité 3 mois. Le strike à la monnaie forwoard est de 1.07313%. Le prix Infinity trouvé est 1.88859 bps.

Date de Valeur :	07/10/2010	INFINITY :	721971
Départ :	07/01/2011		
Fin :	07/04/2011	**Caplet Price by Infinity**	**1,88859**
Strike ATM :	1,07313%		

Grâce à la fonction solver d'Excel nous trouvons la volatilité B&S égale à 35.54957%

2. Détermination du sigma Beta

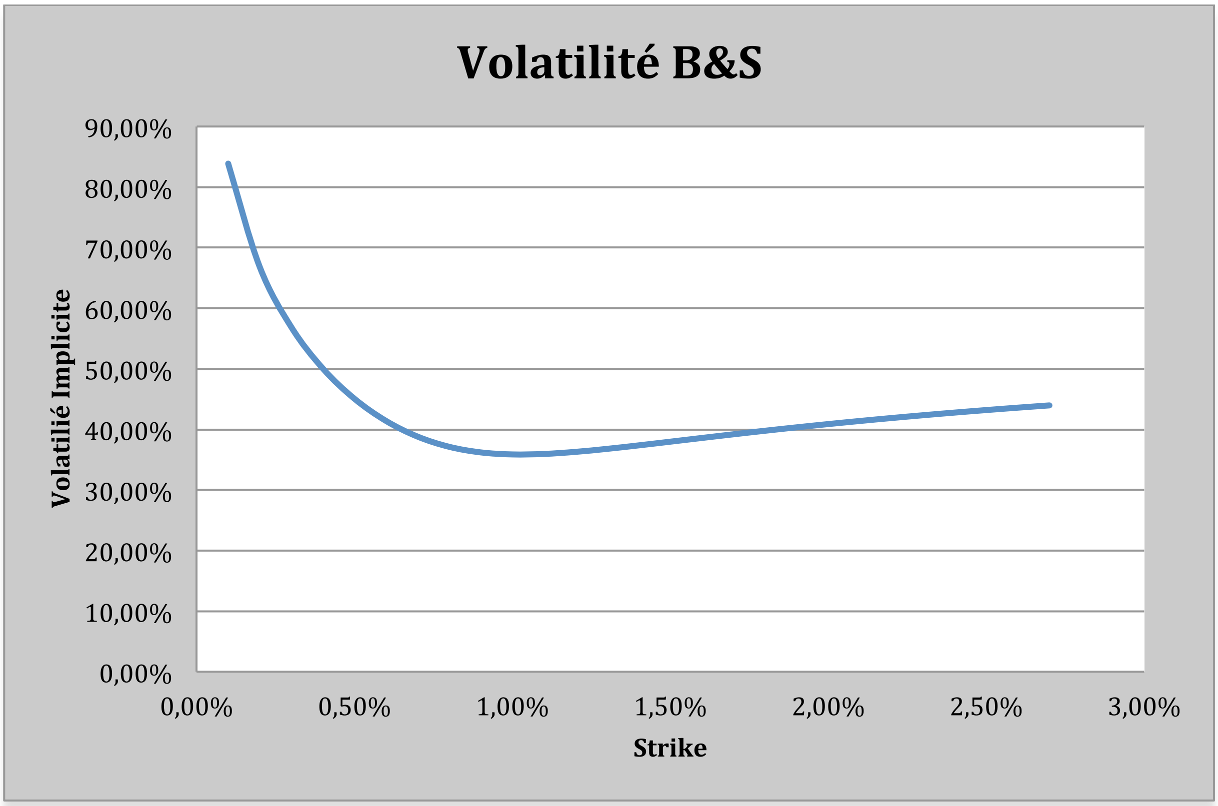
Nous savons qu'à la monnaie, $\sigma = \sigma_{BS} F^{1-\beta}$. Nous obtenons donc facilement la valeur du sigma Beta : 1.487%.

3. Création de la courbe SABR

Nous avons à notre disposition toutes les données pour créer la courbe SABR. En effet, le pricer Infinity met à notre disposition la matrice des α, des ρ ainsi que la valeur du β.

F	1,0731%
T	0,25
SIGMA	1,487%
BETA	30,00%
RHO	41,41%
ALPHA	68,45%

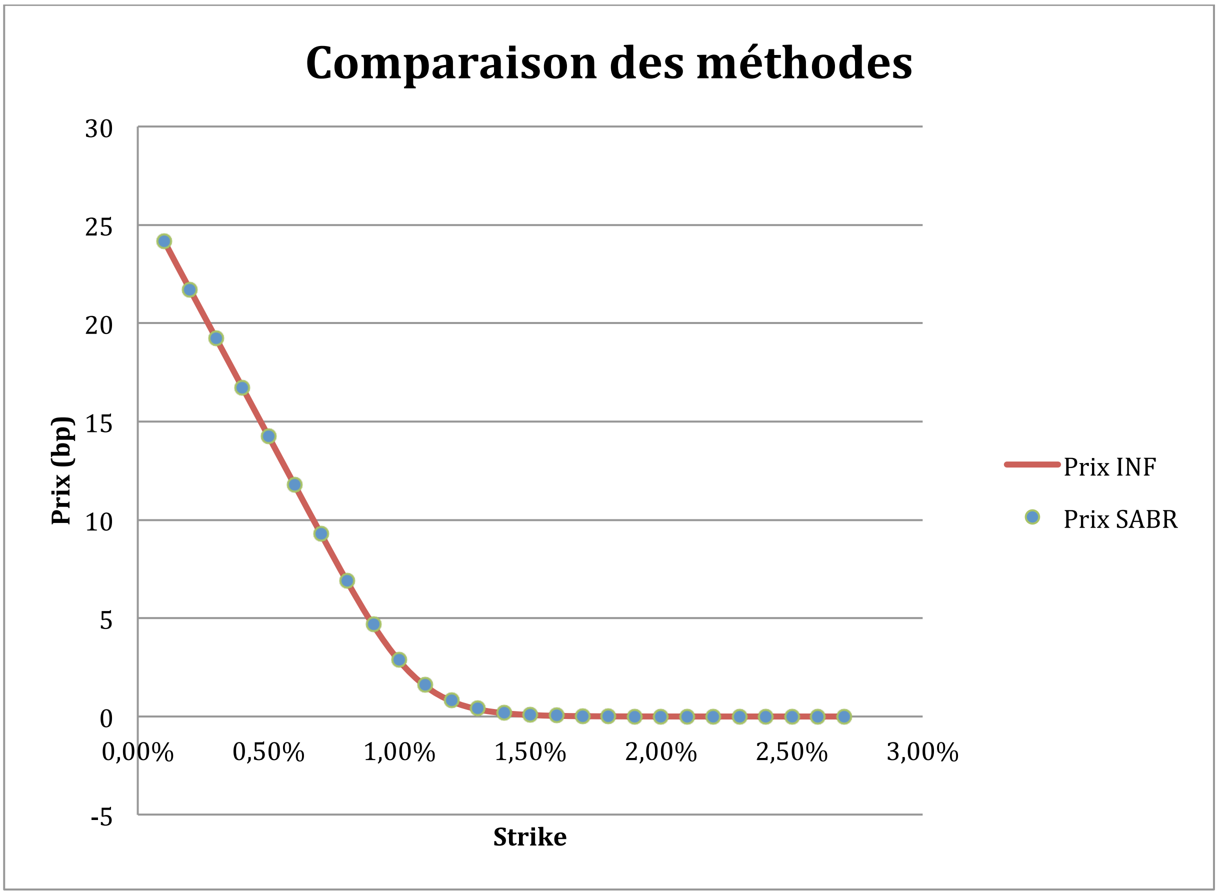
Ensuite nous faisons varier le strike afin de recréer le smile de volatilité et nous traçerons le graphique correspondant.



Graphique 15 – Volatilité Black & Scholes

4. Vérification du matching entre le prix Infinity et le prix SABR.

Nous disposons maintenant du smile de volatilité. Nous allons maintenant calculer la valeur des caplets pour des strikes différents et comparer ces prix aux prix d'Infinity.



Graphique 16 – Comparison du prix Infinity et du prix SABR

Nous trouvons une erreur quadratique en € de 0.00152%.

Nous pouvons donc conclure que nous avons réussi à modéliser le model SABR.

V. Conclusion et perspectives

Nous avons pu montrer dans cette thèse professionnelle que la prise en compte du smile de volatilité est une étape obligatoire dans la valorisation des produits dérivés de taux. Sans la prise en compte de ce smile, les options dans/hors de la monnaie sont très mal valorisées.

Le modèle de Black, dérivé du modèle de Black & Scholes, ne permet pas d'utiliser les données du smile de volatilité puisque la volatilité est supposée constante quels que soient les strike*s*.

C'est le modèle SABR qui a permis, en partant du modèle de Black, d'utiliser au mieux le smile de volatilité. L'intérêt majeur de ce modèle vient du fait que la volatilité est une formule fermée n'utilisant que quelques arguments. Grâce à cette formule fermée il est possible pour les traders de trouver les paramètres permettant de recréer le smile du marché.

Pour conclure, la méthode SABR est une avancée majeure pour le pricing des produits dérivés. Les traders et les quants sont en perpétuels recherche afin d'améliorer cette méthode. Ainsi, le trading exotique USD a décidé d'adapter la formule et de faire intervenir deux betas au lieu d'un et ce afin de mieux pricer les produits dérivés USD. Cette adaptation est en cours d'adoption et sera probablement utilisée par l'ensemble du trading dans les années à venir.

VI. Bibliographie

ABDELKADER Bouttou, *Interest Rate Models & Derivatives Valuation*, MS ESSEC 2008

CHAIX Antonin, Produits dérivés de taux : *Méthodes d'évaluation et de couverture*, ENSAE

CHAZOT Christophe, **CLAUDE** Patrick, *Les Swaps : Concepts et Applications* , ECONOMICA

EISENZIMMER Laurent, *Optimisation de la valorisation de produits structurés de taux*,

EL KAROUI Nicole, *Couverture des risques dans les marchés financiers*, Ecole polytechnique

HAGAN, KUMAR, LESNIEWSKI, WOODWARD, Managing Smile Risk

HERLEMONT Daniel, *Projet courbe de taux : Estimation de la courbe zéro coupon spline polynomiaux*

HITMI Fayçal, *Estimation de la Structure par Terme des Taux d'Intérêt*, INSEA (projet de fin d'études)

HULL John, *Options, futures et autres actifs dérivés*, PEARSON EDUCATION

INFINITY TEAM, *Génération des taux forward à vérifier dans le curve manager*, CA-CIB

LEMONNIER Thomas, *Le métier de Sales en salle des marchés*, Rapport de stage

MEGRET-MERGER David, *Modèle SABR*

PORTAIT Roland, **PONCET** Patrice, *Finance de marché*, DALLOZ

PRIAULET Philippe, **MARTELLINI** Mionel, *Produits de Taux d'Intérêt : Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*, ECONOMICA

RIVA Fabrice, *Applications Financières sous Excel en Visual Basic*, ECONOMICA

SHREVE Stven, *Stochastic Calculus and Finance*, SPRINGER FINANCE

THEORET Raymond, Rostan Pierre, *De la réhabilitation du modèle de Black : tests empiriques de modèles d'options sur taux d'intérêt*, ESG UQAM

URI Ron, *A practical Guide to Swap Curve*, BANK OF CANADA

http://www.valonews.com/

http://fr.wikipedia.org/

http://david.megretmerger.free.fr/

http://www.next-finance.fr/

http://www.vernimmen.net/

http://www.math.ust.hk/~malwu/

http://www.vif.ac.at/

http://www.lesechos.fr/

http://www.aft.gouv.fr/

VII. Répertoire des figures et tableaux

VIII. Annexes

A. Ajustement de date

Following : Report au jour ouvré suivant.
Modified following : Report au jour ouvré suivant sauf si l'on change de mois ; Dans ce cas, on reporte au dernier jour ouvré du mois en cours.
Preceding : Report au jour ouvré précédent.
Modified preceding : Report au jour ouvré précédent sauf si l'on change de mois ; Dans ce cas, on reporte au premier jour ouvré du mois en cours.
None : Aucun report (on reste sur le jour en question).

B. Ajustement de paiement

Ajusté : On prend en compte dans le calcul le fait que le jour de paiement a été déplacé à cause de l'ajustement de date.
Unadjusted : On ne prend pas en compte dans le calcul le fait que le jour de paiement a été déplacé à cause de l'ajustement de date.

C. Base

RAPPEL : le premier jour est inclus, le dernier jour est exclu
Exact/360 ou Money Market / 360 ou AMM (Annual Money Market) : Le numérateur correspond au nombre exact de jours de l'opération (la période peut comprendre 33 jours en cas de WE par exemple)
Exact/365 : De même que précédemment pour le numérateur, on prend en compte 365 jours même en cas d'année bissextile.
Exact/Exact ou Act/Act ou base actuarielle : Le dénominateur est de 365 ou 366 jours suivant si l'année est bissextile ou non.
30/360 ou Bond Basis ou Annual Bond Basis ou Annual 30/360 : Tous les mois ont 30 jours.

D. Définition et notations

Il est important de bien définir les concepts que nous allons utiliser dans la suite de cette thèse. Nous allons définir les différentes sortes de taux d'intérêts.

Prix d'une obligation zéro-coupon :

$B(t, t+\theta)$ le prix à la date t d'une obligation zéro-coupon (c'est-à-dire ne versant pas de flux intermédiaires) versant 1 euro à la maturité.

Prix d'une obligation zéro-coupon à terme :

On note $B^f(t, s, T-s)$ le prix à la date t d'une obligation zéro-coupon commençant à la date s versant 1 euro à la maturité T-s

$$B^f(t, s, T-s) = \frac{B(t,T)}{B(t,s)}$$

Voici maintenant la présentation des différents taux existants :

Le taux zéro-coupon :

On note $\hat{R}(t, \theta)$ le taux zéro coupon correspondant au taux de rentabilité interne d'une obligation zéro-coupon ayant pour prix $B(t, t+\theta)$. On a donc :

$$B(t, t+\theta) = \frac{1}{\left[1 + \hat{R}(t, \theta)\right]^{\theta}}$$

Le taux annuel continu :

On note $R(t, t+\theta)$ le taux annuel continu d'une obligation zéro coupon ayant pour prix $B(t, t+\theta)$. On a donc :

$$B(t, t+\theta) = \exp\left(-\theta R(t, \theta)\right)$$

Ce taux continu R peut se retrouver à partir du taux $\hat{R}$, tel que :

$$R(t, \theta) = \ln\left(1 + \hat{R}(t, \theta)\right)$$

Le taux court :

On note r_t, le taux court, c'est-à-dire le taux zéro-coupon lorsque la maturité du zéro-coupon associé est proche de 0. On a donc :

$$r(t) = r_t = \lim_{\theta \to 0} R(t, \theta)$$

Le taux forward :

On note $F(t, s, T-s)$, le taux forward, c'est-à-dire le taux annuel continu calculé à partir du prix d'un zéro coupon à terme. On a :

$$B^f(t, s, T-s) = \frac{B(t, T)}{B(t, s)}$$

$$B^f(t, s, T-s) = \exp\left(-(T-s) * F(t, s, T-s)\right)$$

$$F(t, s, T-s) = \frac{\ln\left(B(t, s)\right) - \ln\left(B(t, T)\right)}{T-s}$$

Le taux forward instantané :

On note $f(t, s, T-s)$, le taux forward instantané, c'est à dire le taux forward lorsque la maturité est proche de 0. On a donc :

$$f(t, s, T-s) = \lim_{T-s \to 0} F(t, s, T-s)$$

Résumé :

Le marché des taux d'intérêt est un marché complexe puisque les sous-jacent sont nombreux. En effet, à chaque échéance correspond un taux d'intérêt. La valorisation des produits dérivés de taux nécessite tout d'abord de connaitre la courbe des taux, appelée courbe de swap. Cette courbe est construite à partir des données de marché comme les taux de dépôts, les futures et FRA ainsi que des swap contre taux IBOR. Ensuite et contrairement à ce qui est souvent utilisé en première approche, le modèle de Black n'est pas le meilleur pour obtenir le prix des options vanilles. En effet, alors que dans le modèle de Black, la volatilité est supposée constante quel que soient les strikes, ce n'est pas le cas en réalité. Il existe un smile de volatilité : la volatilité en dehors de la monnaie est plus importante qu'à la monnaie. C'est le modèle SABR qui permet de résoudre le problème du smile.

Mots-Clé : Black & Scholes, SABR, modèle de taux, fixed income, swap, FRA, courbe des taux, courbe zéro-coupon, smile de volatilité

Abstract :

The interest rate market is a complex market since underlying are numerous. Indeed, each maturity matches an interest rate. The valuation of interest rate derivatives first requires the knowledge of the yield curve, called "swap curve". This curve is built from market data such as deposit rates, futures and FRA and swap against IBOR rates. The Black model appears not to be the best to price vanilla option. Indeed, while in the Black model, volatility is assumed constant for any strike, this is not the case in reality. It doesn't reflect reality because it assumes that volatility remains constant for any strike. There exists a volatility smile that can be defined as follows : volatility in & out of the money is more important than at the money volatility. The SABR model solves the problem of smile.

Key-Words : Black & Scholes, SABR, interest rate model, fixed income, swap, FRA, interest rate curve, zéro-coupon yield curve, volatility smile